el profanador de textos

Hermann von Baravalle

La primera enseñanza de la aritmética

índice

BM078S2

el profanador de textos

profanador, ra.
(Del lat. *profanātor*, -ōris).
1. adj. Que profana. U. t. c. s.

profanar.
(Del lat. *profanāre*).
1. tr. Tratar algo sagrado sin el debido respeto, o aplicarlo a usos profanos.
2. tr. Deslucir, desdorar, deshonrar, prostituir, hacer uso indigno de cosas respetables.

confesiones de invierno

(¡siempre charly garcía debe estar presente!)

quiero a los libros —esos seres impresos en árboles muertos (o debería decir 'asesinados')— con 'sagrado' respeto, pero resulta que muchas veces son inhallables… o hallables a un precio inalcanzable.

por eso me convierto en 'profanador': 'deshonro,' 'prostituyo' la belleza del papel y transfiero la sabiduría a este nuevo ser electrónico.

es verdad: dejo sin pan a quien lo creó. pero completo su más profundo deseo: difundir su conocimiento.
(a mi tampoco me convencen estas 'razones,' son puro bla, bla, bla.)

el diseño apaisado es para que sea fácil leerlo en el monitor de la computadora o impreso en hoja A4, simple o doble faz. a fin de cuentas, millones de libros han sido leidos 'fotocopiados' en ese formato. (en realidad, los más beneficiados son los que venden recargas truchas de cartuchos.)

con respecto a este libro

Título: 'La primera enseñanza de la aritmética'
Autor: Hermann von Baravalle

Segundo suplemento al Boletín de Metodología Núm. 78. Mayo-Junio de 1979. [BM078S2]

Editorial: Institución Waldorf para la adaptación en México de nuevas técnicas de enseñanza.

primera pedeeficación: mayo 26, 2015

actualizaciones:

para colaborar

Correcciones: para aportar correcciones a los textos, por favor, enviar un email a **elprofanadordetextos@yahoo.com**, poniendo en el 'Asunto:' el nombre de la publicación y en el cuerpo, el texto equivocado y el nuevo, con referencia de página. Gracias.
Dactilografiado: hay mucho material traducido en forma manuscrita que 'desea' ser publiccado. Si quieren aportar el tiempo de datilografiado, por favor, enviar un email a **elprofanadordetextos@yahoo.com**, poniendo en el 'Asunto: Tipear.' Gracias.

GA

Los **libros y conferencias de Rudolf Steiner** se catalogan según el 'GA,' 'Gesamtausgabe' ['Edición Completa']. En todas las citas se ha intentado referir al número de GA para evitar confusiones por las diferencias en las traducciones de los títulos. Se traduce el título al castellano para referencia, pero no significa que el libro esté traducido. La cita '[GAnnn:cc:pp]' significa 'párrafo pp' de la 'conferencia cc' del GA 'nnn.'

BM

Los **Boletines de Metodología** para los presentes y futuros maestros Waldorf' fueron publicados por Juan Berlín desde México.
Los artículos son identificados con el número de boletín y una letra según el orden de aparición en el mismo. La cita '[BM024c]' significa 'el tercer artículo (letra c)' del 'boletín 24.'
En el caso de suplementos, se usa directamente la letra 's': [bm011s].

párrafos

Para facilitar las referencias cruzadas, los párrafos son identificados con un número (02) o un número y una letra (02c) al inicio de los mismos.
En todos los casos, el número indica el número de párrafo correspondiente a la edición alemana.
La letra representa una subdivisión de dicho párrafo, en caso que ayude a la mejor identificación de los temas.

1 introducción

Vitalidad y flexibilidad de mente, en lugar de una rutina mecánica aletargante, han pasado al primer lugar en la lista de las necesidades culturales del presente. Científicos de vanguardia colocan la urgencia de esta necesidad al nivel de las medidas contra la carencia de acero y carbón.

Los valores humanos han llegado a considerarse en igual nivel y aún superior de otras necesidades materiales en el desarrollo de nuestro futuro inmediato.

Las respuestas a las necesidades anteriores no son únicamente preocupación de universidades y agencias gubernamentales, tampoco están confinadas a la escuela profesional, sino que llaman a la iniciativa de cada individuo en todos los niveles y materias escolares.

A través de la enseñanza de la aritmética es posible hacer contribuciones esenciales hacia estos ideales. Lo que se requiere es un cambio en el énfasis de los métodos de enseñanza.

Estamos acostumbrados a evaluar la aritmética, y las matemáticas en general, exclusivamente sobre la base de las ventajas materiales que se ganan a través de ellas.

Sin embargo, fallamos al convencer a muchos de nuestros estudiantes del valor y la necesidad de sus estudios de aritmética y matemáticas.

No podemos negar que muchos adultos jamás usan o usarán capítulos completos de la aritmética que aprendieron en la escuela.

Comenzamos a encontrar un punto de vista para evaluar la aritmética en nuestra escuela.

> *“Puedo contar hasta 20 sin interrupción… ”*
> *“Hice una división larga y resultó correcta… ”*
> *“Multipliqué todas estas fracciones y el resultado es simplemente 2/3.”*

Tales decires de nuestros niños en diferentes edades traen consigo la expresión vívida de haber realizado una marcada victoria en sus vidas. Estas expresiones son comparables a eventos recibidos con expresiones similares de realización en la temprana infancia.

Obsérvese a un niño moverse libremente por primera vez a través de un cuarto. El triunfo radiante refleja la realización y la consiguiente ganancia en autoconfianza.

Hay aplicaciones prácticas para la habilidad de caminar; de hecho, desde entonces el niño, hará uso de tales aplicaciones cada día de la vida, pero esta aspecto aún no está en la mente infantil.

La temprana infancia tiene como una bendición su indiferencia al punto de vista utilitario.

Lo propio sucede con los estudios tempranos de la aritmética, poca impresión causamos en el niño si le señalamos lo útil que es aprenderla; lo que cuenta para él es el estímulo de la aritmética en sí.

Cómo enseñar aritmética con este enfoque es lo que se describe en los ejemplos de este cuaderno.

Los puntos de vista señalados para la aritmética no se circunscriben a esta materia exclusivamente; pueden aplicarse a otras áreas de estudio y conducen a un programa escolar integral: el ‘Plan de estudios Waldorf.’

Su origen data de 1919; su autor es el filósofo y educador austríaco Rudolf Steiner. El nombre ‘Waldorf’ se debe a que la primera escuela fue fundada por el director de la ‘Fábrica de Cigarrillos Waldorf Astoria’ de Stuttgart, Alemania, para los hijos de sus obreros.

En la actualidad (1979)[1] existen más de 160 escuelas Waldorf en el mundo; unas 15 en los Estados Unidos de Norteamérica. ♣

[1] La edición de Mayo 2015 del ‘Waldorf World List. Directory of Waldorf and Rudolf Steiner schools and Teacher Training Centers Worldwide’ [‘Lista Mundial Waldorf. Directorio mundial de las escuelas Waldorf y Rudolf Steiner y centros de entrenamiento de maestros’] indica que hay 1063 escuelas Waldorf y Rudolf Steiner en 60 países; 125 en Estados Unidos y 14 en Argentina. [n. del pr.]

2 el primer contacto de los niños con los números

Los niños tienen contacto con los números desde sus días preescolares y estas son generalmente experiencias felices.

A un niño le gusta repasar esas breves palabras que comienzan con 'uno,' continúan con 'dos,' y así sucesivamente, cada una teniendo que esperar a la anterior y siendo, a su vez, guía para la siguiente.

En los jardines de infantes de las escuelas Waldorf las experiencias numéricas de los niños no se incluyen para fines de instrucción.

Las enseñanzas que requieren el uso de la memoria comienzan con el primer grado. Para comenzar, el maestro pregunta a los niños qué tanto pueden contar. Un niño comenzará, le seguirá otro y al final algunos de ellos podrán contar bastante más allá que el eresto.

El maestro hará que la totalidad de la clase cuente en conjunto y repetirá estos ejercicios un cierto número de días individualmente y en grupos.

Los niños son ávidos para seguir adelante con su cuenta y les gusta seguir hasta números más y más grandes. En su vida diaria emplean frases cortas, pero cuando se trata de contar parece que no hubiera fin.

Cualquier día un niño puede preguntar:

"¿Llegaremos alguna vez al último número?"

Al obtener la respuesta "No" tiene un sentimiento de sorpresa y de temor reverente; efectivamente, hay algo en los números que es diferente de cualquier otra cosa con que se haya encontrado.

Contando, pronto llegará a cierto descubrimiento: siempre que llegamos a números como 19, 29, 39… necesitamos una nueva palabra clave como 20, 30, 40… para seguir adelante.

Entonces nos paramos nuevamente con otro número con 9. La naturaleza rítmica de nuestro sistema decimal se hace manifiesta en las secuencias repetitivas hasta el 9.

A este respecto señalaremos algún día que con cada palabra clave nueva podemos seguir adelante tantos pasos como dedos tenemos en nuestras manos.

Tomando como ejemplo el número 20 para el dedo gordo de una mano, los otros dedos serán 21, 22, 23, 24 y la otra mano incluyendo el dedo gordo, 25, 26, 27, 28, 29. Entonces ya no quedan dedos, ni tampoco números con la palabra clave 20.

Ahora comenzamos con 30. La referencia a los dedos une a nuestro estudio con el desarrollo histórico real del proceso de contar: el mismo término 'dígito' se deriva de 'digitis,' la palabra latina para 'dedos.'

A continuación del ejercicio con los dedos se seguirá el ejercicio con objetos varios.

El procedimiento descrito lleva del despertar de una actividad mental a la integración de esta actividad con percepciones sensorias; su dirección es desde el interior hacia el exterior.

En un principio, el contar tendrá casi la naturaleza de una recitación. Entonces viene el uso de los dedos y establece un puente entre la actividad mental interior y el trato final con objetos que ya no son parte del niño.

Ahora procedemos al conteo rítmico, enfatizando ciertos números en la secuencia. Por ejemplo, acentuando cada tercer número tendremos:

1 2 <u>3</u>   4 5 <u>6</u>   7 8 <u>9</u>   10 11 <u>12</u>

El siguiente paso consiste en hacer que los niños pronuncien los números no acentuados más y más suavemente hasta que no se les oiga, y únicamente se vean los pequeños labios moviéndose.

Habiendo silenciado los números 1, 2; 4, 5; 7, 8; 10, 11… quedarán los números acentuados 3, 6, 9, 12… como los únicos que se oigan, y se habrá llegado a la tabla del 3.

Similarmente se llegará a las tablas del 2, 4 y 5. Para las tablas de números superiores es progresivamente dificultoso sostener el ritmo. Podemos hacer uso de ayudas adicionales escribiendo los números, primero la secuencia pero subrayando cada tercer número, o haciéndolo de otro color.

Finalmente los números marcados se separan y forman la tabla del 3. Por escrito podemos fácilmente ir a tablas superiores. Contando separadamente cada séptimo número obtenemos por ejemplo:

1 2 3 4 5 6 <u>7</u> 8 9 10 11 12 13 <u>14</u> 15 16 17 18 19 20 <u>21</u> 22 23 24 25 26 27 <u>28</u>…

En la historia de las matemáticas encontramos durante el período griego un método concebido por Eratóstenes de Alejandría[1] llamado 'la malla.' Este

[1] Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.): Matemático, astrónomo y geógrafo griego. Tuvo a su cargo la Biblioteca de Alejandría.

método se usó para determinar los números primos y consistía en un eliminar rítmico de todos los números compuestos en la forma siguiente.

En la secuencia natural de números se tacha cada segundo número a continuación del 2:

1 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~
21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~…

Adicionalmente, se tacha ahora cada tercer número a continuación del 3 y que no haya sido tachado previamente:

1 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~
~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~…

Los números restantes hasta el 24 son los números primos. Para números superiores se continúa tachando cada quinto número a continuación del 5, con el cual se obtienen los números primos hasta el 48. Entonces tacharemos cada séptimo número después del 7, con lo que alcanzamos el 49, 77, 91, 119 y quedan todos los números primos hasta el 120.

El hecho de que el conteo rítmico aparezca tempranamente en la historia de las matemáticas mismas añade un fondo histórico a los métodos descritos. ♣

Calculó por primera vez la circunferencia de la Tierra, con un error menor al 15%, algo impensable con los medios de medición de su época. [n. del pr.]

3 tablas de multiplicación

El siguiente paso —a continuación de la introducción de las tablas de multiplicación a través del conteo rítmico— ayuda a consolidar su conocimiento. En este punto debe mencionarse un elemento característico del 'Plan de Estudios Waldorf.'

En las escuelas Waldorf las diversas materias no se imparten una a continuación de otra en secuencia de 40 o 50 minutos.

Los primeros dos períodos de la mañana se dedican, por un cierto número de semanas, a una de las principales materias de estudio, y se lleva a cabo una rotación de estas materias durante el año escolar.

En el primer grado, esto se refiere principalmente a una alternación entre la enseñanza de la lectura, escritura y aritmética. En cualquier caso, las mañanas se planean en forma bien balanceada de modo que los niños no se agoten.

Por el contrario, la cohesión del trabajo produce una considerable economía de esfuerzo y tiempo. Cada vez que una materia se tiene en turno en la rotación, se hace con un nuevo punto de vista.

Respecto de las tablas de multiplicación, éstas se pueden tomar la segunda vez con un aspecto comparativo. Se puede mostrar que la tabla del 4 se obtiene de la tabla del 2 en la misma forma como la tabla del 2 se obtuvo del mero conteo. Tomando la tabla del 2 hasta el 40 y enfatizando cada segundo número obtenemos:

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 25 28 30 32 34 36 38 40

Los números subrayados son 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40. Repitiendo el mismo procedimiento una vez más, llegaremos a la tabla del 8.

Comenzando con la tabla del 3 y enfatizando cada tercer número llegaremos a la tabla del 6 y la repetición del mismo procedimiento conduce a la tabla del 12.

Pueden desarrollarse relaciones adicionales entre las diferentes tablas de la siguiente manera. Escribimos la secuencia numérica en una línea. Bajo ésta repetimos los números de la tabla del 2 y en la tercera línea los de la tabla del 3.

En esta forma algunos números aparecerán únicamente en la primera línea, otros en la primera y segunda, otros en la primera y tercera, y algunos en las tres líneas.

Seleccionamos los últimos y los escribimos abajo en una cuarta línea llegando así a la tabla del 6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		…
	2		4		6		8		10		12		14		16		18		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
		3			6			9			12			15			18		
					6						12						18		

Extendiendo los ejercicios de las tablas del 2 y 3 al incluir las del 4 y 6 llegamos al siguiente esquema; en la primera línea escribimos todos los números, en la siguiente línea solamente los de la tabla del 2, y en las líneas siguientes aquellos de las tablas del 3, 4 y 6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	2		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
		3			6			9			12			15			18			21			24
			4				8				12				16				20				24
					6						12						18						24
											12												24

Únicamente 12 y 24 aparecerán simultáneamente en todas las líneas. Los escribimos abajo una vez más y forman el comienzo de la tabla del 12. Los niños notarán la regularidad del patrón total.

Esto habla del orden inherente en la aritmética. Para mostrarla deberán escribirse las cifras cuidadosamente. Una escritura nítida es un producto secundario esencial del aprendizaje de la aritmética.

Ejercicios orales alternarán con los ejercicios escritos. El ejercicio oral correspondiente al último sería en esta forma:

La clase se divide en 4 grupos, uno representando la tabla del 2, otro representando la tabla del 3, otro la tabla del 4, y otro la tabla del 6. El maestro cuenta en voz alta, cada grupo responde, también en voz alta, con sus respectivos números.

Al número 1 ningún grupo responderá. Al número 2, se unirá el grupo de la tabla del 2, mientras que los otros grupos permanecerán silenciosos. En el número 3, el grupo de la tabla del 3 se dejará escuchar y en el 4 dos grupos al mismo tiempo, aquellos representando la tabla del 2 y la tabla del 4.

En el número 5 todos los grupos permanecer silenciosos, pero en 6 tres grupos se reunirán, aquellos de la tabla del 2, del 3 y del 6, con un grupo únicamente, el de la tabla del 4, que permanecerá silencioso.

En este punto puede surgir la pregunta de si hay algunos números en los que los cuatro grupos se reúnan. La búsqueda de tales números es el siguiente paso del ejercicio y será una bienvenida regocijante la del número 12, cuando toda la clase en conjunto se reúna simultáneamente.

Si hubiéramos escogido otras cuatro tablas para ser representadas por los cuatro grupos hubiéramos tenido que esperar mucho más antes de que todos se reunieran juntos. Para las tablas del 2, 3, 4, 5, por ejemplo, éste seria el caso del número 60.

Con el hecho de que los números 12 y 60 se han encontrado como los que reúnen a la clase en su totalidad, se ha obtenido el trasfondo necesario para entender ciertos números de nuestro derredor.

Los números del reloj llegan hasta el 12, y contamos 60 minutos en una hora.[1] No tenemos que referirnos a estos números como un mero acuerdo convencional, sino podemos relacionarlos con el descubrimiento que han hecho los niños de que los números 12 y 60 se encuentran en muchas tablas de multiplicación.

Esto determina su divisibilidad múltiple y les ha dado su significado desde tiempos ancestrales, desde los cuales han llegado a nosotros esas medidas. En esta ocasión podemos también indicar que hay 12 meses en un año, 12 pulgadas en un pie, 12 huevos en una caja, etcétera.

La dirección de este enfoque procede desde el interior hacia el exterior, esto es, desde una experiencia interna hacia la realización de los hechos correspondientes en la vida diaria a nuestro al derredor.

[1] Otra posible explicación: En la Antigüedad se contaba señalando con el dedo pulgar de una mano, cada una de las 3 falanges de los restantes dedos de la misma mano, comenzando por el meñique, contando así hasta 12. Y para seguir, se separa un dedo de la otra mano libre, hasta completar 60 unidades (12 x 5 = 60), por lo que este número fue considerado una 'cifra redonda.' Esto también explica la 'gruesa,' doce docenas, 144 unidades, al usar el mismo procedimiento en ambas manos. [n. del pr.]

En una tercera oportunidad, el maestro de aritmética puede proceder a una comparación entre las diversas tablas para establecer un resumen final. En la escuela Waldorf se hace uso extenso de apuntes escritos e ilustrados por los propios niños y que se van produciendo en su propio trabajo escolar diario.

Usualmente se conservan dos tipos de libros de apuntes: uno para los ejercicios diarios no destinados a referencia permanente, y el otro en el cual es cuidadosamente elaborado el contenido importante de cada unidad de aprendizaje. El último llega a ser un apreciado tesoro para los niños.

La mejor clase de tarea es aquella que no se exige de los niños, sino que se estimula durante las horas escolares y que realizan los niños para completar su trabajo escolar y es puesta por ellos mismos en forma de registro permanente.

Las tablas de multiplicación pueden así ser resumidas en la siguiente forma tabulada. Cada tabla aparece tanto en una línea como en una columna. La visión global de las tablas estimulará varios descubrimientos.

En la tabla del 9, por ejemplo, los dígitos finales van descendiendo desde 9 al 8, 7, 6… hasta el 0. En la tabla del 2, los últimos dígitos ascienden dos veces hasta el 8, siendo los únicos números que aparecen el 0, 2, 4, 6 y 8.

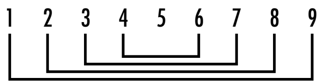
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	24	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

En las tablas del 4, del 6 y del 8 estos mismos números aparecen en los últimos dígitos. En la tabla del 2 ascienden regularmente, en la tabla del 8 descienden regularmente, pero en la tabla del 4 están mezclados 4, 8, 2, 6. En la tabla del 6, su secuencia es exactamente al revés: 6, 2, 8, 4.

En la tabla del 3, los dígitos al final muestran una secuencia muy irregular: 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7. Exactamente la misma secuencia pero al revés aparece en la tabla del 7: 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3.

De hecho, la secuencia inversa de la tabla del 1 se muestra en la tabla del 9; la de la tabla del 2, en la tabla del 8; la de la tabla del 3, en la tabla del 7, y la de la tabla del 4, en la tabla del 6.

Estas relaciones entre los números correspondientes se muestran gráficamente en el siguiente diagrama.



El 5 queda en la mitad del esquema. De hecho, los últimos dígitos de la tabla del 5 pueden ser leidos por igual en una dirección y en la opuesta, pues contienen únicamente el 5 y el 0 alternados.

Los número de las tablas cuyos dígitos finales tienen el orden invertido, suman 10. Incluso el 5 cae dentro de esta regla, dado que suma 10 cuando se suma consigo mismo:

$$1 + 9 = 10$$
$$2 + 8 = 10$$
$$3 + 7 = 10$$
$$4 + 6 = 10$$
$$5 + 5 = 10$$

Las correspondencias descritas invitan a la introducción del 0 en el comienzo de todas las tablas, dado que 0 x 3 = 0. Esto hace las secuencias invertidas completas; por ejemplo, en las tablas del 3 y del 7 obtenemos así para sus dígitos finales:

0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0
y 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0

En esta forma podemos justificar de un modo natural el concepto del 0. ♣

4 las cuatro operaciones

La introducción y práctica de las cuatro operaciones con los números enteros en forma oral y escrita es un tópico primordial de la aritmética de los primeros tres grados.

[Adición]

Ya hemos visto las tablas de multiplicación. De hecho, la multiplicación es una operación más orgánica y más fácilmente concebible que la adición.[1]

Se trata de una adición especial que repetidamente opera con el mismo número.

[1] La diferencia entre la naturaleza de la multiplicación y la adición se muestra claramente en el campo de las fracciones. Al multiplicar fracciones podemos simplemente multiplicar los numeradores y los denominadores mientras que al sumarlos tenemos que seguir el procedimiento más complejo de llevar las dos fracciones a un denominador común:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} = \frac{14 + 15}{21} = \frac{29}{21}$$

[N. del Au.]

multiplicación	3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 + 3 = 21
adición	3 + 8 + 5 + 2 + 6 + 1 + 9 =31

La suma puede también derivarse del contar aunque no tan fácilmente como las tablas de multiplicación. Un día podemos sugerir a la clase comenzar el conteo, en lugar del 1, con el 13, por ejemplo.

Después de haber realizado un número de ejercicios con diferentes comienzos, el maestro pedirá a la clase lo siguiente:

> *"Después de contar hasta el 12 sigan contando cinco pasos más."*

Entonces la clase contará 13, 14, 15, 16, 17. Así habremos determinado tanto un principio como un final de nuestro conteo.

Habiendo realizado una serie de prácticas orales similares, procederemos a escribir lo que hemos dicho. Contando hasta 12, siguiendo 5 pasos más y llegando al 17, esto se describe como 12 + 5 = 17. Si el maestro acompaña los ejercicios orales con gestos, al ir hacia adelante en el conteo con un movimiento horizontal del brazo; y al detenerse en el lugar correcto con un movimiento vertical, el signo '+' aparece por sí mismo, como resumen de la actividad que simboliza. En el signo '=,' que señala el resultado final, la línea 'hacia adelante' aparece subrayada.

Durante la práctica de la suma con una variedad creciente de números, ocurre una transición gradual y natural de la forma en la cual los niños manejan los problemas. Primero los resuelven contando cada paso completamente, más o menos con la ayuda de los dedos; después encuentran que pueden realizar ciertas sumas sin tener que contar. Este descubrimiento es primero hecho por algunos niños y otros lo logran posteriormente, pero es felizmente bienvenido por todos ellos.

[Resta]

La resta será derivada de la actividad de contar hacia atrás. Primero el maestro puede contar hasta cierto número y regresar al 1. Finalmente limitará el conteo en ambos extremos diciendo:

> *"Contaré hacia atrás cierto número y entonces ustedes seguirán cinco pasos más."*

Así el maestro deteniendo el conteo hacia atrás en 17, la clase continuará: 16, 15, 14, 13, 12. Durante estos ejercicios orales el maestro podrá acompañar el conteo hacia atrás con el gesto de mover su mano horizontalmente de derecha a izquierda (en lugar de izquierda a derecha) y detenerse con un movimiento vertical. Al introducir el signo 'menos,' explicaremos que un signo escrito no indica si la línea horizontal ha sido descrita hacia adelante o hacia atrás; por ello mismo nos ayudamos eliminando la línea vertical suponiendo que para este momento conocemos nuestra aritmética suficientemente bien para recordar el resto mentalmente.

En la práctica de la resta se pueden usar ciertas secuencias:

10	–	1	=	9
10	–	2	=	8
10	–	3	=	7
10	–	4	=	6
10	–	5	=	5
10	–	6	=	4
10	–	7	=	3
10	–	8	=	2
10	–	9	=	1

Cada línea comienza con 10. Primero restamos 1 de 10, después 2, después 3, y así sucesivamente hasta que restamos 9. En esta forma los números en la segunda columna ascienden gradualmente, pero aquellos en el lado derecho descienden.

Otra secuencia es la siguiente:

10	–	1	=	9	15	–	6	=	9
11	–	2	=	9	16	–	7	=	9
12	–	3	=	9	17	–	8	=	9
13	–	4	=	9	18	–	9	=	9
14	–	5	=	9	19	–	10	=	9

En ambas columnas los números a la izquierda ascienden, y los del lado derecho permanecen en 9. Tales secuencias pueden hacer más para la clarificación del concepto de resta que muchas definiciones o explicaciones elaboradas.

[Sumas y restas]

Avanzanco para combinar adiciones y restas, se le puede decir al grupo:

> *"Cuenten hasta 10, regresen 4 pasos y finalmente den 6 hacia adelante: 10 - 4 + 6 = 12."*

Entonces se puede tomar la misma operación en un orden diferente, primero contando hasta 10, después 6 pasos hacia adelante y finalmente 4 pasos hacia atrás: 10 + 6 - 4 = 12. Nuevamente terminamos en 12.

Absteniéndonos de enunciar reglas, introducimos primero una actividad mental, seguimos con más ejercicios para aclarar el procedimiento y finalmente llegamos a conceptos y reglas.

Hay lugar de sobra para practicar sin degenerar en machaqueo. Al niño no le molesta la repetición; le gusta tanto en sus cuentos como en sus juegos.

[Problemas prácticos]

Los problemas prácticos presentan desafíos adicionales, pues requieren conectar la actividad mental aritmética con la realización de varios propósitos. Para realizar este objetivo el maestro puede comenzar diciendo:

"Contemos hasta 10 y regresemos hasta 1."

Mientras esto se hace, no sólo contará con los niños, sino que sostendrá 10 lápices en su mano y, con cada número, pondrá un lápiz sobre el escritorio con un movimiento rítmico. Cuando el conteo haya llegado a 10, estarán 10 lápices en una hilera sobre la tabla.

Al contar hacia atrás, el maestro quitará un lápiz cada vez. Finalmente, cuando el grupo cuente 1, sólo quedará un lápiz. Se podrá reconocer por el regocijo de los niños, que este hecho no era evidente para ellos.

Consideremos un problema práctico:

"Juan recibe 5 manzanas de su padre, 4 de su madre, 2 de su hermana y 1 de su hermanito. ¿Cuántas manzanas ha recibido?"

De las preguntas de los niños es evidente que tal problema estimula su instinto de posesión.

Establezcamos el problema de la manera siguiente:

"Juan lleva una canasta con 12 manzanas del huerto a su casa: algunas recogidas por su padre, otras por su madre, algunas por su hermana y otras por su hermanito. ¿Cuántas han sido recogidas por la familia?"

En esta forma operamos determinando las contribuciones y estimulamos una reacción muy diferente.

También proporciona más estímulos adicionales para encontrar una segunda solución después de la primera, una tercera y así sucesivamente:

$$
\begin{array}{l}
12 = 5 + 4 + 2 + 1 \\
12 = 6 + 4 + 1 + 1 \\
12 = 3 + 5 + 2 + 2
\end{array}
$$

Comenzamos con la suma total y la diferenciamos en sus partes.

El que el énfasis inicial se ponga en la suma total, corresponde a una recomendación de Rudolf Steiner, hecha en el curso pedagógico para los maestros de la primera escuela Waldorf.[2] Con ello, él enfatizó un elemento esencial de la aritmética.

Siempre que estemos sumando objetos diferentes, por ejemplo, 4 manzanas y 3 peras, no podemos ir adelante sin alcanzar primero el concepto comprensivo de 'fruta.' De una manera similar, 4 manzanas rojas y 3 verdes, o 4 grandes y 3 pequeñas, no pueden sumarse hasta que hayamos eliminado sus aspectos diferenciales y llegado al concepto más general de 'manzanas.' Siempre hay un primer paso en la dirección hacia la totalidad, antes de que pueda realizarse una adición.

Los problemas encontrrán su reflejo en los cuadernos de apuntes del grupo, por ejemplo:

Secuencias aditivas		Secuencias multiplicativas
12 = 1+11	12 = 7+ 5	12 = 1 x 12
12 = 2+10	12 = 8+ 4	12 = 2 x 6
12 = 3+ 9	12 = 9+ 3	12 = 3 x 4
12 = 4+ 8	12 = 10+ 2	12 = 4 x 3
12 = 5+ 7	12 = 11+ 1	12 = 6 x 2
12 = 6+ 6		12 = 12 x 1

En el lado derecho de la secuencia aditiva los números de la primera columna ascienden, los de la segunda, descienden. Al principio, la primera parte es pequeña, la segunda grande, pero al final, la primera parte es grande y la segunda, pequeña. En el medio, son iguales: 12 = 6 + 6.

Tales ejercicios son, al mismo tiempo, preparatorios para el manejo escrito de la adición. Después de alguna instrucción sobre cómo escribir correctamente un número debajo del otro como:

$$
\begin{array}{r|}
12 \\
4 \\
108 \\
25
\end{array}
$$

Siempre conservando los dígitos finales en una línea vertical, podemos atacar la suma de 12 + 13 + 24 = 49 en la forma siguiente:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
12 & = & 10 & + & 2 & & \\
13 & = & 10 & + & 3 & & \\
24 & = & 20 & + & 4 & & \\
\hline
 & & 40 & + & 9 & = & 49
\end{array}
$$

que finalmente queda condensada así:

$$
\begin{array}{r}
12 \\
13 \\
24 \\
\hline
49
\end{array}
$$

[2] Steiner, Rudolf. 'Metodología y didáctica.' [GA294:01:15]

Cuando llegamos al problema de acarreos y a números mayores procedemos como en el siguiente ejemplo. Primero sumamos los números de la última columna y obtenemos 28. Escribimos 28 abajo de la línea, luego sumamos la siguiente columna y llegamos a 25. Deseando escribirlo bajo la línea encontramos que su lugar está parcialmente ocupado. Si insistiéramos en que el 25 tomara su lugar el 5 tendría que escribirse encima del 2 y habría confusión. Entonces el 25 renuncia a su lugar y se escribe abajo:

$$
\begin{array}{r}
234\\ 681\\ 714\\ 523\\ 614\\ 728\\ 184\\ \hline 28\\ 728
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
234\\ 681\\ 714\\ 523\\ 614\\ 728\\ 184\\ \hline 28\\ 25
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
234\\ 681\\ 714\\ 523\\ 614\\ 728\\ 184\\ \hline 3428\\ 25\\ \hline 3678
\end{array}
$$

En esta forma, el sitio para la suma de la tercera columna, que es 34, queda libre. Finalmente, sumando las sumas parciales llegamos al total de 3678.

Subsiste un elemento aún no satisfactorio y que nos conduce al paso siguiente. El 25 cede su lugar porque éste fue tomado por el 28. ¿Cómo podemos hacer que el 28 permanezca dentro de sus límites? Escribimos el 8 del 28 y el 2 lo escribimos más pequeño arriba de la línea.

En la misma forma el 25 sigue el buen ejemplo, ocupa el lugar de su 5 únicamente, mientras el 2 se acomoda pequeño un lugar adelante, encima de la línea. Así la suma total se hace más breve y obtenemos:

$$
\begin{array}{r}
234\\ 681\\ 714\\ 523\\ 614\\ 728\\ 184\\ {\scriptstyle 22}\\ \hline 3678
\end{array}
$$

En la resta procedemos de una manera similar. Para calcular: 36 - 15 = 21, escribimos:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
-\;36 & = & 30 & + & 6 & & \\
15 & = & 10 & + & 5 & & \\ \cline{3-5}
 & & 20 & + & 1 & = & 21
\end{array}
$$

que finalmente se condensa a:

$$
\begin{array}{r}
-\;36\\ 15\\ \hline 21
\end{array}
$$

Cuando llegamos al problema de acarreos, la subdivisión de los números deberá de ajustarse de modo que sea posible restar todos los dígitos. En el caso de 36 - 17 = 19, obtenemos:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-\;36 & = & 30 & + & 6 & = & 20 & + & 16 & & \\
17 & = & 10 & + & 7 & = & 10 & + & 7 & & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & 10 & + & 9 & = & 19
\end{array}
$$

Con números mas grandes 7431 - 5785 = 1646 obtenemos primeramente:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\;7431 & = & 7000 & + & 400 & + & 30 & + & 1\\
5785 & = & 5000 & + & 700 & + & 80 & + & 5
\end{array}
$$

y encontramos que no podemos restar en tres lugares, en las centenas, las decenas y las unidades.

El único lugar donde la resta es posible y de donde podemos obtener ayuda es en los miles. Entonces, uno de los miles se pasa a las centenas. Las centenas ayudan a las decenas dándoles una de sus centenas y finalmente, las decenas ayudan a las unidades. Así obtenemos los pasos sucesivos:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcr}
-\;7431 & = & 7000 & + & 400 & + & 30 & + & 1 & = & 6000 & + & 1400 & + & 30 & + & 1\\
5785 & = & 5000 & + & 700 & + & 80 & + & 5 & = & 5000 & + & 700 & + & 80 & + & 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{crcrcrcrcrcrcrcrcl}
= & 6000 & + & 1300 & + & 130 & + & 1 & = & 6000 & + & 1300 & + & 120 & + & 11 & & \\
= & 5000 & + & 700 & + & 80 & + & 5 & = & 5000 & + & 700 & + & 80 & + & 5 & & \\ \cline{10-16}
 & & & & & & & & & 1000 & + & 600 & + & 40 & + & 6 & = & 1646
\end{array}
$$

Lo que resta por hacer es simplemente abreviar la notación hasta llegar finalmente a:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & (6) & (13) & (12) & (11)\\
- & 7 & 4 & 3 & 1\\
 & 5 & 7 & 8 & 5\\ \hline
 & 1 & 6 & 4 & 6
\end{array}
$$

Paralelamente a la reducción de la notación, ocurre una intensificación de los procesos mentales.

La transición de la primera forma a la final será hecha por los diversos niños en tiempos diferentes. Sabrán que, por un lado, pueden regresar siempre al método lento y por el otro, tienen la notación abreviada como un ideal ante ellos.

[Multiplicación escrita]

La multiplicación escrita puede introducirse como sigue: Comiéncese practicando una de las tablas, por ejemplo, la tabla del, 4. Primero sígase la secuencia completa: 1 x 4 = 4; 2 x 4 = 8; 3 x 4 = 12; 4 x 4 = 16; 5 x 4 = 20… Continúese con una secuencia de ejercicios mixtos: 7 x 4 = 28; 4 x 4 = 16; x 4 = 24; 5 x 4 = 20; 8 x 4 = 32…

Entonces escriba en forma descendente los números que fueron multiplicados por 4 en fila y repita su multiplicación. Los resultados se escriben abajo de los números correspondientes, según permitan los lugares que no hayan sido ocupados de antemano.

En este caso, los números se relegan a la línea inmediata inferior. Así obtenemos sucesivamente:

74658 x 4	74658 x 4	74658 x 4	74658 x 4	74658 x 4
32	32	2432	2432	282432
	20	20	1620	1620

Sumando las últimas líneas llegamos a:

```
 74658 x 4
282432
 1620
298632
```

Simplificando el procedimiento en la misma forma que hicimos con la adición, obtenemos:

```
 74658 x 4
 1223
286402
298632
```

Y finalmente, conservando los números en la memoria, llegamos a la forma simplificada:

```
 74658
   x 4
298632
```

Cuando esto esté bien definido, procedemos a la multiplicación por números de varios dígitos sin encontrar dificultades particulares.

[División larga y corta]

El método de la división abreviada presenta una notación más concentrada que el de la división larga; por consiguiente, es aconsejable comenzar con ésta última.

Un análisis de los varios pasos a seguir en la división larga, sugiere los siguientes: Comenzamos escribiendo los números de alguna tabla de multiplicación, por ejemplo la del 6, anotando asimismo cuántos número seis están contenidos en dichos números.

Entonces el maestro nombra varios números al azar y deja que el grupo responda si pertenecen o no a la tabla del 6. Cuando no pertenezcan a la tabla del 6, el grupo dirá el múltiplo de 6 inferior más próximo, y también cuántos número seis contiene este múltiplo, así como la diferencia entre éste y el número nombrado. Estas respuestas se pueden escribir en el pizarrón en forma tabulada.

Número dado	¿Está en la tabla del 6?	¿Cuál es el múltiplo de 6 más próximo y cuántos 6 contiene?	El número dado ¿cuántas unidades está arriba?
14	NO	12 = 2 x 6	2
25	NO	24 = 4 x 6	1
12	SI	12 = 2 x 6	0

El asunto ahora es reacomodar la tabulación para llegar a la notación de la división larga:

```
     243
6) 1458
   12
    25
    24
     18
     18
      0
```

Comenzando con los dos primeros dígitos de 1458, que son 14, decidimos si 14 está o no en la tabla del 6. ¡No está! El número mis próximo en la tabla del 6 abajo de 14 es 12. Lo escribimos abajo del 14. Como 12 es 2 x 6, anotamos 2 en la parte superior, y como 14 está arriba de 12, anotamos bajo éste 2. Después de bajar el 5, repetimos el procedimiento para 25 y así sucesivamente.

El paso del método de la división larga al de la división corta consiste en abreviar la notación y con esto aumenta la actividad mental.

[Divisibilidad]

Realizando, por ejemplo, divisiones por 3 para una serie de dividendos elegidos por miembros del grupo, encontraremos que algunos de ellos terminan dejando un residuo de 0, otros 1 y otros 2.

Encontrar cuál es el caso puede llegar a ser casi un juego. ¿Quién puede decir un número que dividido por 3 no deje residuo? Las probabilidades son 2 contra 1. Entonces el maestro nombrará varios números cuya división por 3 no deje residuo. Al dar estos ejemplos, el maestro no ha consultado un libro ni los copió de un papel; no obstante, son correctos, aún cuando estos números estén en el rango de los millones.

¿Cómo lo hizo? Finalmente explicará que el número 51.849.345 es divisible por 3 pues la suma de sus dígitos: 5 + 1 + 8 + 4 + 9 + 3 + 4 + 5 = 39 es divisible por 3. La suma de los números puede repetirse para el 39 de modo de obtener 3 + 9 = 12 y, en igual forma para 12: 1 + 2 = 3.

Así, continuando la suma de los dígitos, siempre llegamos a uno de estos tres números: 3, 6 o 9, para cualquier número divisible por 3. Los niños comenzarán inmediatamente a tratar de convencerse de que esto es correcto en cada caso.

Otro día será repetido un procedimiento similar con otro divisor y conducirá a otra regla de divisibilidad. Es particularmente sencillo determinar si un número es divisible por 2 o por 5.

Todos los números pares son divisibles por 2.

Para decidir en el caso del 5, basta con mirar el último dígito. Si éste es 0 o 5, el número es divisible por 5.

Un número puede ser dividido por 6 si es par y, al mismo tiempo, divisible por 3.

El criterio para el 7 es más complicado. Con objeto de decidir si el número 324.926.488.628.756 es divisible por 7, tomamos sus dígitos en grupos de 3; comenzando de la derecha, se suman los grupos impares; asimismo, se suman los grupos pares; se resta la suma de los pares de los impares y se analiza el resultado.

$$\begin{array}{r} 756 \\ +\ 488 \\ 324 \\ \hline 1568 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 628 \\ +\ 926 \\ \hline 1557 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1568 \\ -\ 1554 \\ \hline 14 \end{array}$$

El resultado es 14. Como es divisible por 7, el número original es divisible por 7.[3]

Un número es divisible por 8 cuando el número formado por los tres últimos dígitos puede ser dividido por 8.

Para decidir la divisibilidad de un número por 9 procedemos en la misma manera que con el 3. Teniendo el número 967.857.295.648.521.567 sumamos los dígitos 9 + 6 + 7 + 8 + 5 + 7 + 2 + 9 + 5 + 6 + 4 + 8 + 5 + 2 + 1 + 5 + 6 + 7 = 117. Sumando los dígitos de 117 obtenemos 1 + 1 + 7 = 9. Con todos los números divisibles por 9 finalmente llegamos al 9.

Un número es divisible por 10 cuando su último dígito es 0.

Para decidir si un número es divisible por 11, sumamos cada segundo dígito. Después, sumamos los dígitos remanentes y substraemos el menor del mayor. Para el número 7.245.678 obtenemos así:

$$\begin{array}{lr} 7 + 4 + 6 + 8 = & 25 \\ 2 + 5 + 7 = & -\ 14 \\ \hline & 11 \end{array}$$

Repitiendo el procedimiento: para el resultado obtenemos 1 - 1 = 0. Siempre que llegamos a 0, el número original es divisible por 11.

Un número es divisible por 12 cuando es divisible por 3 y 4.

El hecho de que algunas reglas de divisibilidad se refieran a la suma de los dígitos, algunas a los últimos dígitos y algunas a procedimientos más complejos, abre el panorama de la variedad de las relaciones numéricas y anticipa estudios adicionales, hasta niveles superiores. ♣

5 ejercicios con las cuatro operaciones y estudios numéricos

Ejercicios para practicar las tablas se pueden llevar a cabo con un espíritu de investigación. Los resultados obtenidos en cada ejercicio estimularán a una exploración adicional.

Un primer ejemplo puede ser respecto de los números pares y nones en las tablas de multiplicación. ¿Hay tablas cuyos números son todos pares, todos nones, pares y nones mezclados, con más pares o con más nones? Repasando las varias tablas, los niños encontrarán que hay tablas con números pares únicamente, pero que no hay ninguna tabla con números nones únicamente. No hay tablas con más pares que nones ni con más nones que pares.

En todas las tablas con números pares y nones éstos siguen una alternación regular. Las tablas con números pares contienen únicamente números pares, mientras que aquellas con números nones contienen pares y nones alternados.

Comprobando estos hechos, los niños irán a través de ejercicios que los ayudarán a recordar las tablas. El número a continuación del 21 en la tabla del 3, no puede ser 23 o 25; tiene que ser par. De ahí hay un solo paso a darse cuenta de lo siguiente:

[3] Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 o un múltiplo de 7. Ejemplos: 343 > 34 – (2 x 3) = 28 > 28 es múltiplo de 7. 105 > 10 – (5 x 2) = 0. 2.261 > 226 – (1 x 2) = 224, se repite el proceso: 224 > 22 – (4 x 2) = 14 >14 es múltiplo de 7. [n. del pr.]

número par	+	número par	=	número par
número par	+	número impar	=	número impar
número impar	+	número par	=	número impar
número impar	+	número impar	=	número par

que está relacionado con el hecho fundamental del álgebra:[1]

número positivo	x	número positivo	=	número positivo
número positivo	x	número negativo	=	número negativo
número negativo	x	número positivo	=	número negativo
número negativo	x	número negativo	=	número positivo

Ejercicios para practicar las cuatro operaciones

Ejercicios de suma pueden ser hechos con los llamados 'Cuadrados Mágicos,' que han proporcionado estímulo para la investigación matemática durante siglos. En la Figura 5-1, los números del 1 al 9 se distribuyen entre 9 cuadrados dentro de un cuadrado mayor.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 5-1. Cuadrado Mágico con los números del 1 al 9.

Los números no siguen una secuencia natural. Están mezclados de tal manera que sumados en cada línea y columna, así como a lo largo de las diagonales, producen la misma suma. Para la primera línea obtenemos 2 + 7 + 6 = 15, para la segunda 9 + 5 + 1 = 15, para la tercera 4 + 3 + 8 = 15. En la primera columna obtenemos 2 + 9 + 4 = 15; en la segunda columna, obtenemos 7 + 5 + 3 = 15, y en la tercera 6 + 1 + 8 = 15. A lo largo de las diagonales, obtenemos 2 + 5 + 8 = 15, 4 + 5 + 6 = 15. La única regularidad en la distribución de los números dentro del cuadro es la secuencia 4, 5, 6 a lo largo de una de las diagonales. Esto puede ser una clave para encontrar la manera en que los números están colocados como en la Figura 5-2.

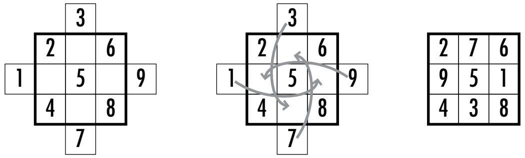


Figura 5-2. Génesis de un Cuadrado Mágico con los números del 1 al 9.

Además del cuadrado dibujado con líneas gruesas, con nueve cuadros parciales dentro de él, los primeros dos diagramas contienen cuatro cuadrados pequeños adicionales, los cuales forman con las líneas divisorias interiores del cuadrado grande, la figura de una cruz.

En el primer diagrama, los números del 1 al 9 se colocan en forma diagonal dentro de los espacios. En el segundo diagrama, aquellos números que estén situados fuera del cuadro grande se introducen dentro de éste moviéndolos a lo largo de sus respectivos caminos a los espacios libres más lejanos posibles. El tercer diagrama muestra el resultado.

Otro método para obtener el mismo Cuadrado Mágico se muestra en la Figura 5-3. Los números del 1 al 9 se escriben dentro de un cuadrado en una disposición diagonal como se muestra en el primer diagrama.

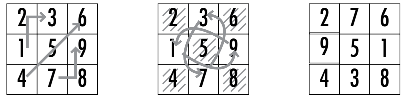


Figura 5-3.

En el segundo diagrama los cuadrados a lo largo de las diagonales están sombreados. Los números localizados en ellos permanecen sin cambio mientras que los otros números se mueven a lo largo de las flechas a las sitios opuestos. El tercer diagrama muestra el resultado.

Los diagramas de la Figura 5-4 muestran un Cuadrado Mágico con 16 números. En el primero los números del 1 al 16 se escriben en su secuencia natural dentro de los 16 espacios, comenzando en la esquina superior izquierda y procediendo regularmente de línea en línea. Los espacios a lo largo de la diagonal se sombrean.

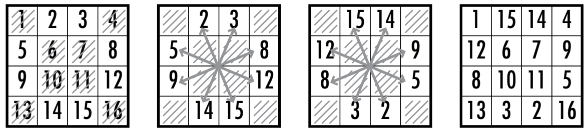


Figura 5-4. Génesis del Cuadrado Mágico del 1 al 16.

Los números en las áreas sombreadas permanecen en sus lugares, los demás números cambiaran lugares con aquellos en la posición opuesta respecto del centro del cuadrado. En el tercer diagrama se muestran en sus nuevas posiciones. El cuarto diagrama da el resultado, el Cuadrado Mágico con 16 números.

La suma de todos estos números a lo largo de cada línea, columna y diagonal es 34. El Cuadrado Mágico contiene también una variedad adicional de grupos de números que suman 34. Estos son los cuatro números de

[1] Compárese con el artículo del autor 'Psychological Points of View on the Teaching of Arithmetics' ['Puntos de vista psicológicos en la enseñanza de la aritmética']; The Mathematics Teacher; Official Journal of the National Council of Teachers of Mathematics, Teacher's College, Columbia University, New York. Diciembre. 1944. [N. del Au.]

las esquinas: 1 + 4 + 13 + 16 = 34. La suma de los cuatro números centrales es: 6 + 7 + 10 + 11 = 34. Reuniendo los puntos medios de los espacios de estos dos últimos grupos obtenemos el primer diagrama de la Figura 5-5.

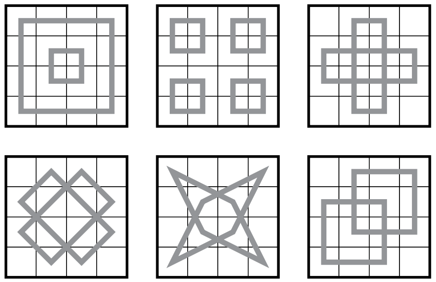
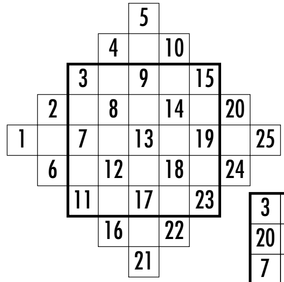


Figura 5-5. Conjuntos de cuatro números con la suma de 34.

Los otros diagramas muestran los patrones de más grupos de cuatro números cuya suma es también 34. Siguiendo el segundo diagrama, por ejemplo obtenemos:

1 + 15 + 6 + 12 = 34
8 + 10 + 3 + 13 = 34
14 + 4 + 9 + 7 = 34
11 + 5 + 16 + 2 = 34

Hay también Cuadrados Mágicos de más de 16 números. Un ejemplo de Cuadrado Mágico con los números del 1 al 25, así como el método para obtenerlo —similar al de la Figura 5-3— se muestra en la Figura 5-6.



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

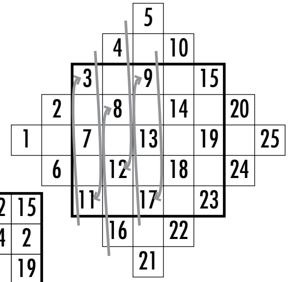


Figura 5-6. Génesis de un Cuadrado Mágico del 1 al 25.

Los Cuadrados Mágicos no sólo proveen ejercicios de suma, sino también de tablas de multiplicación. En lugar de usar los números 1, 2, 3, 4… en un Cuadrado Mágico, podemos tomar los números de cualquier tabla de multiplicación. Escogiendo, por ejemplo, las tablas del 3 y del 8 obtenemos para el Cuadrado Mágico de 9 lugares la Figura 5-7. En el diagrama de la izquierda la suma constante es 45 y en la de la derecha 120.

6	21	18
27	15	3
12	9	24

16	56	48
72	40	8
32	24	64

Figura 5-7. Cuadrados Mágicos para las tablas del 3 y 8.

[Números cuadrados]

Trabajando con los Cuadrados Mágicos llevamos a los estudiantes a los números cuadrados: 3 x 3 = 9; 4 x 4 = 16; 5 x 5 = 25. Los números cuadrados proveen muchas oportunidades para estudio, aún para los grados elementales. Podemos mostrar cómo los números cuadrados pueden ser obtenidos de tres diferentes maneras. Estas se muestran en la tabla siguiente.

En la primera manera, los números cuadrados se obtienen por multiplicación. En la segunda manera, se obtienen por suma, contando hacia adelante y hacia atrás, por ejemplo: 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16. La suma es el número cuadrado del mayor número al que se llegó en el conteo.

1 x 1 = 1	1	= 1
2 x 2 = 4	1 + 2 + 1	= 4
3 x 3 = 9	1 + 2 + 3 + 2 + 1	= 9
4 x 4 = 16	1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1	= 16
5 x 5 = 25	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 25
6 x 6 = 36	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 36
7 x 7 = 49	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 49

En la tercera manera, obtenemos el cuadrado de un número sumando esa cantidad de números impares. Para el cuadrado de número 4 sumamos los primeros cuatro número impares: 1 + 3 + 5 + 7 = 16; para el cuadrado del 5, los primeros cinco números impares; y así sucesivamente.

1	= 1
1 + 3	= 4
1 + 3 + 5	= 9
1 + 3 + 5 + 7	= 16
1 + 3 + 5 + 7 + 9	= 25
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	= 36
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13	= 49

Esta manera de obtener los números cuadrados tiene su antecedente en la historia de la ciencia. Forma el escenario matemático de las leyes de gravedad de Galileo,[2] como se ilustra en la Figura 5-8.

[2] Galileo Galilei (1564-1642): Astrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico italiano relacionado estrechamente con la revolución científica. Eminente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura). Ha sido considerado

El diagrama contiene líneas horizontales y verticales, estas últimas a igual distancia entre sí. Las líneas horizontales están espaciadas desigualmente. La distancia entre las dos líneas horizontales más superiores es la menor.

Esta se considera una unidad; la siguiente distancia hacia abajo es 3 unidades, después 5, 7, 9… unidades. Esto hace que las líneas horizontales queden abajo de la línea superior con los siguientes espaciamientos: 1 + 3 = 4; 1 + 3 + 5 = 9; 1 + 3 + 5 + 7 = 16.

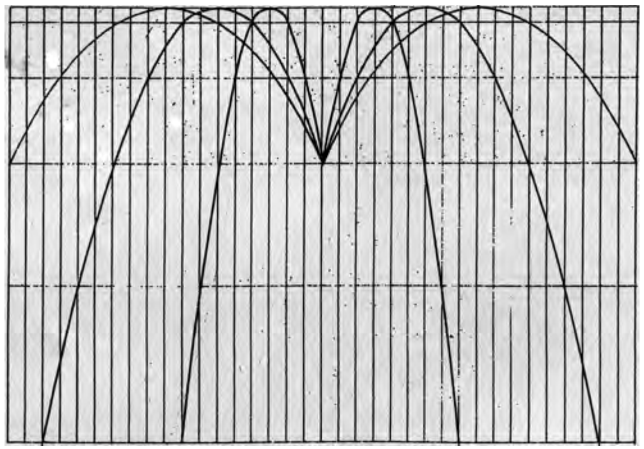


Figura 5-8. Parábola de una fuente siguiendo la Ley de los Números Cuadrados.

Las curvas —que son parábolas— se derivan de estas líneas verticales y horizontales de la siguiente manera: comenzando desde cualquier punto de intersección entre una línea horizontal y una vertical y procediendo de ahí hacia la izquierda o hacia la derecha de una línea vertical a la siguiente, combinamos con ellas escalones hacia arriba o hacia abajo de una línea horizontal a la que sigue. Así obtenemos puntos sucesivos que unidos forman la parábola.

En la Figura 5-8 el punto intermedio de la cuarta línea horizontal desde arriba fue escogido como el punto de partida. Las primeras parábolas se obtienen conectando este punto con la intersección de la primera línea vertical hacia la derecha (o hacia la izquierda) con la siguiente línea horizontal hacia arriba.

Se continua en esta forma hasta pasar la inflexión de la parábola. Ahora se conectan las intersecciones de las líneas verticales sucesivas con las horizontales hacia abajo.

Después, dos pasos hacia la derecha o hacia la izquierda se combinan con cada paso entre dos líneas horizontales y esto produce otro par de parábolas. Finalmente, tres pasos entre las líneas verticales combinados con un solo paso entre las líneas horizontales conduce a la parábola más externa.

Las curvas que siguen las gotas de agua de una fuente accionada por la gravedad son parábolas, y el diagrama muestra los movimientos en una fuente derivados de la ley de los números cuadrados.

En la siguiente tabulación, los números cuadrados se escriben en la primera columna. A su derecha hay dos columnas adicionales. La de en medio, cuyos números se colocan entre los renglones de los números cuadrados, dan su diferencia.

La última columna muestra el valor constante 2, y está hecha de las diferencias entre los números sucesivos de la columna de en medio.

0		
	1	
1		2
	3	
4		2
	5	
9		2
	7	
16		2
	9	
25		2
	11	
36		2
	13	
49		2
	15	
64		2
	17	
81		2
	19	
100		

[Números cúbicos y superiores]

Extendiendo el mismo procedimiento a los números cúbicos, 1 x 1 x 1 = 1; 2 x 2 x 2 = 8; 3 x 3 x 3 = 27… llegamos a la siguiente tabla:

0 x 0 x 0 =	0			
		1		
1 x 1 x 1 =	1		6	
		7		6
2 x 2 x 2 =	8		12	
		19		6
3 x 3 x 3 =	27		18	
		37		6
4 x 4 x 4 =	64		24	
		61		6
5 x 5 x 5 =	125		30	
		91		6
6 x 6 x 6 =	216		36	
		127		6
7 x 7 x 7 =	343		42	
		169		6
8 x 8 x 8 =	513		48	
		217		6
9 x 9 x 9 =	729		54	
		271		6
10 x 10 x 10 =	1000		60	
		331		6
11 x 11 x 11 =	1331		66	
		397		
12 x 12 x 12 =	1728			

Los números cúbicos aparecen en la primera columna. A su derecha hay tres columnas adicionales, cada una hecha de las diferencias entre dos números sucesivos de la columna precedente. La última columna muestra valor constante 6; la penúltima es la tabla del 6.

Para las cuartas potencias obtenemos cuatro columnas de diferencias, la última con el valor constante 24.

el ‘padre de la astronomía moderna,’ el ‘padre de la física moderna’ y el ‘padre de la ciencia.’ [n. del pr.]

Para las quintas potencias obtenemos cinco columnas de diferencias, la última con el valor constante de 120. El número 120 tiene los factores: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120, así como el número 24: 4 x 3 x 2 x 1 = 24 y el número 6: 3 x 2 x 1 = 6.

Esta regla de construcción es válida para cualesquiera potencias superiores y juega un papel importante en el cálculo:

$$\frac{d^2\ x^2}{d\ x^2} = 2; \qquad \frac{d^3\ x^3}{d\ x^3} = 6; \qquad \frac{d^4\ x^4}{d\ x^4} = 24;$$

y en general: $$\frac{d^n\ x^n}{d\ x^n} = n!$$

Otras secuencias numéricas que se pueden usar como material de exploración son las siguientes:

1 x 9 + 2 = 11	1 x 8 + 1 = 9
12 x 9 + 3 = 111	12 x 8 + 2 = 98
123 x 9 + 4 = 1111	123 x 8 + 3 = 987
1234 x 9 + 5 = 11111	1234 x 8 + 4 = 9876
12345 x 9 + 6 = 111111	12345 x 8 + 5 = 98765
123456 x 9 + 7 = 1111111	123456 x 8 + 6 = 987654
	1234567 x 8 + 7 = 9876543

En la primera secuencia, el resultado consiste de solamente de números uno y en cada línea hay tantos unos como el número que ha sido añadido a los múltiplos de 9.

En la segunda secuencia, los resultados comienzan con 9 en sus dígitos superiores y bajan regularmente en los siguientes. Hay tantos dígitos en cada resultado como el número que se le ha añadido al múltiplo de 8.

Otro estudio numérico puede llevarse a cabo de la siguiente manera.

El maestro pide a cada niño escoger un número entre 1 y 9, y luego solicita a la clase multiplicar ese número por 9.

En caso que el niño haya elegido el número 6, escribirá 6 x 9 = 54. Después el maestro pide a toda la clase escribir el número 12345679 que consta de los números del 1 al 9 con excepción del 8. Ahora multiplicamos este número por el múltiplo elegido de 9.

12345679 x 54 = 666.666.666

El resultado es 666.666.666, mostrando nueve veces el número que el niño había originalmente elegido. Un niño que elija 1 al principio obtendrá 111.111.111.

Así cada niño obtiene su número de vuelta. La respuesta a la pregunta de por qué ocurre esto y la razón para omitir el 8 en el multiplicando se obtiene estudiando la división de 111.111.111 por 9:

```
    12345679
9) 111111111
    9
    21
    18
     31
     27
      41
      36
       51
       45
        61
        54
         71
         63
          81
          81
           0
```

Los residuos son sucesivamente, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71 y 81 en los que el 9 cabe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 veces, saltando el 8. Nueve veces 12.345.679 es, por consiguiente, 111.111.111. Su doble será, por consiguiente, 222.222.222 y su triple, 333.333.333, y así sucesivamente.

Para multiplicaciones aún más grandes, se puede usar la siguiente extensión del último ejercicio. Multiplique el número 11223344556677890 (nótese que hay solamente un 8, 9 y 0), por el múltiplo de 9 de su elección. En el caso de 6 x 9 = 54 obtenemos el producto: 606060606060606060 y similarmente para cualquier otro múltiplo.

La explicación reside de nuevo en la división de 101010101010101010 entre 9; 101010l010101010 10 ÷ 9 = 11223344556677890.

[Otros problemas]

De interés especial son también los problemas que conducen a un mismo resultado comenzando con diferentes números.

Un ejemplo es el siguiente: Elija un número con tres dígitos y escríbalo. Escriba bajo de él el número que obtiene intercambiando su primero y último dígitos. Substraiga el menor del mayor de estos dos números. En el resultado, intercambie de nuevo el primero y último dígitos; escriba este número bajo del último y súmelo. Por ejemplo:

Número de tres dígitos elegido arbitrariamente	743	
Intercambio del primer y tercer dígitos	347	–
Resultado de la substracción	396	
Intercambio del primer y tercer dígitos	693	+
Suma	1089	

La suma será siempre 1089 cualquiera que sea el número que se haya elegido al principio.

Innumerables ejercicios estimulantes para los niños podrán ser preparados por el maestro para todas las operaciones a todos los niveles escolares. Para la suma de cuatro números podemos elegir, por ejemplo:

251	785	958
324	823	745
417	149	863
119	465	794
1111	2222	3333

Y antes de que esto se haga monótono cámbiese en la siguiente suma a:

896	976	384
784	887	562
983	793	217
771	879	453
3434	3535	1616

Y así sucesivamente. En la preparación de tales ejemplos escogemos los primeros tres números a voluntad. Entonces los sumamos, y restamos esta suma del resultado que deseamos obtener para llegar al cuarto número.

Con el tiempo, algunos niños preguntarán: ¿Cómo hace para que los resultados se produzcan en esta forma? El maestro lo explicará y los niños prepararán secuencias adicionales por sí mismos, aplicando varias ideas espontáneas. Todo esto dará por resultado que los niños hagan espontáneamente más tarea en casa de la que uno podría ordinariamente haberles dado. ♣

6 fracciones comunes y decimales

Aunque las fracciones comunes fueron conocidas en la antigüedad, desde entonces y hasta la Edad Media se concibieron medios para evitar su uso.

Dándonos cuenta del tiempo que nos tomó el consolidar el conocimiento de los números enteros en aritmética, no debemos intentar el comienzo de operaciones con fracciones demasiado temprano en nuestra enseñanza, antes que las mentes infantiles estén listas para retenerlos.

Tal como las fracciones decimales, las fracciones comunes no aparecen en la historia de las matemáticas hasta el siglo XVI. La primera mención de fracciones decimales se encuentra en una colección de ejemplos aritméticos por Christoph Rudolff[1] publicada en Augsburg en 1530, y la primera presentación sistemática de operaciones con decimales apareció tan tardíamente como 1585 por el científico holandés Simón Stevin.[2]

En las escuelas Waldorf los primeros tres años se planifican para dar a los niños una base firme en las operaciones con números enteros únicamente. Esto no excluye considerar algunos conceptos como 1/2 hora, 1/4 hora, etcétera, pero no se hace un estudio especial de las fracciones comunes antes del cuarto grado, y de las fracciones decimales antes del quinto grado.

Las fracciones no pueden surgir del conteo o del conteo rítmico como surgen los números enteros. Su concepción se basa desde el principio en experiencias con objetos. Al introducir las fracciones comenzamos usualmente dividiendo varios objetos, quizá una manzana o un pastel de cumpleaños.

Mostramos 1/2, 1/4, 1/12, y también 3/4, 5/12… y procedemos así desde el todo a las partes.

El modo inverso, ir de las partes al total podría introducirse, por ejemplo, preguntando a un niño cuántos hermanos y hermanas hay en casa. Cuando responda “dos hermanos y una hermana,” entonces, junto con papá y mamá, hay 5; él mismo es, pues, 1/5 de la familia. El mismo niño puede ser 1/30 de los niños de esta clase, o 1/31 de la clase incluyendo al maestro. Él también puede ser 1/300 de los niños de su escuela o 1/325 de la totalidad de la escuela incluyendo los maestros y otros adultos que trabajan en ella. El mismo niño puede ser 1/4.000 de su comunidad, 1/195.000.000 de la gente de los Estados Unidos y 1/3.200.000.000 del total de la humanidad.[3]

1 Christoph Rudolff (1499-1545): Autor del primer libro alemán de álgebra ‘Behend und durch die hübsch Rechnung kunstreichen Regeln Algebre’ [‘Agilidad y destreza en las normas algebraicas de la contabilidad’]. [n. del pr.]

2 Simon Stevin o Simón de Brujas o Stevinus (1548-1620): Matemático, ingeniero militar e hidráulico neerlandés. A sus 37 años, publicó ‘La aritmética de Simón Stevin, de Brujas,’ breve tratado sobre las fracciones decimales Se le considera el padre de los números negativos por ser el primer matemático que los aceptó como resultado de ecuaciones algebraicas. [n. del pr.]

3 En la actualidad (mayo 2015) sería: ‘1/320.000.000 de la gente de los Estados Unidos y 1/7.400.000.000 del total de la humanidad.’ [n. del pr.]

En el modo actual de pensar existe una marcada tendencia a ser preeminentemente analítico. Tendemos a segmentar la totalidad en partículas específicas y atribuir a éstas las causas de ciertos comportamientos.

Nuestras explicaciones científico-naturales se basan generalmente en conceptos de partículas integrantes. El alcance de esta disposición mental parece casi una explicación suficiente de nuestros concepto de átomo, electrones, etcétera.

Necesitamos contrabalancear esta disposición tratando de concebir el aspecto de totalidad.

En la enseñanza de la aritmética se pueden hacer contribuciones considerables en esta dirección. Además de la demostración de dividir una hoja de papel con objeto de mostrar sus fracciones, podemos considerar la hoja misma como una fracción de la totalidad del cuaderno, o como una fracción del trabajo del grupo entero.

Un paquete de barajas contiene 52 piezas diferentes; cada baraja es 1/52 del paquete. Cuando se pierde una sola baraja, la totalidad del paquete ya no vale nada. Una hora es 1/24 de un día, un día es 1/7 de una semana, una semana es 1/52 de un año y el año puede ser 1/80 de una vida.

Un día puede echarse a perder cuando se desperdicia una hora, y una vida entera se puede destruirse en un minuto de descuido.

Además del concepto de fracción como cociente entre las partes y su totalidad, hay también otro concepto de fracciones que en estudios más avanzados toma preponderancia sobre los demás: el concepto de razón.

En la Figura 6-1 se dibujan dos árboles: uno es alto y otro pequeño, pero cada uno es un árbol completo.

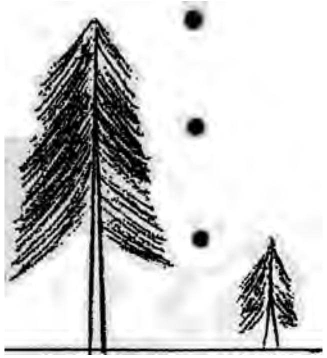


Figura 6-1. El concepto de razón.

El árbol de la izquierda es tres veces más alto que el de la derecha y el árbol de la derecha tiene la tercera parte de la altura del de la izquierda. Si el árbol más alto fuera cuatro veces más alto que el otro, el pequeño tendría 1/4 de la altura del alto. El cambio entre los puntos de vista de comparación, asocia una fracción a cada número entero.

En la Figura 6-2, el árbol más grande es 3/2 del más pequeño y el más pequeño es 2/3 del más grande.

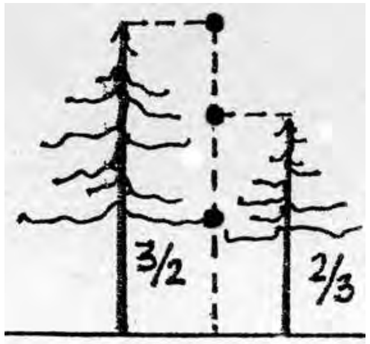


Figura 6-2.

En la Figura 6-3, el árbol mayor es 4/3 del menor, y el menor es 3/4 del mayor. Invirtiendo la comparación, se obtienen las fracciones recíprocas.

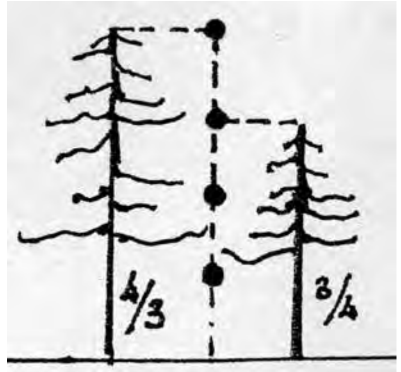


Figura 6-3.

El concepto de razón puede también extenderse de dos a tres o más objetos. En la Figura 6-4 hay 3 árboles, el de la derecha tiene dos veces la altura del de en medio y éste dos veces la altura del de la izquierda. Así, el árbol de la derecha tiene 2 x 2 = 4 veces la altura del árbol de la izquierda.

Por otro lado, el árbol de la izquierda es 1/2 del de en medio, y el de en medio, 1/2 del de la derecha; de esta forma, el árbol izquierdo es 1/2 x 1/2 = 1/4 del de la derecha.

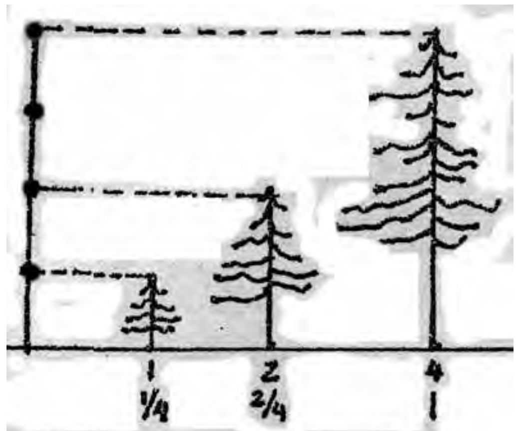


Figura 6-4.

La comparación continua implica la multiplicación de fracciones. Para las operaciones:

$2;\quad 2 \times 2 = 4;\quad 2 \times 2 \times 2 = 8;\quad 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16; \ldots$

que nos llevan a números más y más grandes, asocie lo siguiente:

$\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};\quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8};\quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}; \ldots$

haciendo que las fracciones sean cada vez menores. Duplicando el denominador de una fracción, su valor se reduce la mitad, mientras que doblando el numerador se aumenta el valor de la fracción al doble. Consecuentemente, aumentando y disminuyendo por el mismo factor el numerador como el denominador, se cancelan a sí mismos:

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Esto conduce a la simplificación de fracciones:

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7}{3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7} = \frac{2}{3}$$

[Simplificación de fracciones]

Cuando la fracción dada sea, por ejemplo,

$$\frac{142560}{199584} =$$

resolvemos el numerador y el denominador en producto de sus factores primos. Comenzando con el numerador, primero decidimos si es divisible por 2, tantas veces como sea posible; después, si es divisible por 3, tantas veces como sea posible; después, por 5, y así sucesivamente hasta que la división repetida reduzca el numerador a un factor primo.
Los cocientes sucesivos se escriben a un lado de una línea vertical, los divisores correspondientes en el otro:

142560	2	199584	2
71280	2	99792	2
35640	2	49896	2
17820	2	24948	2
8910	2	12474	2
4455	3	6237	3
1485	3	2079	3
495	3	693	3
165	3	231	3
55	5	77	7
11	11	11	11

Después se hace lo mismo con el denominador. A continuación, la fracción original se escribe como un cociente de dos productos y en esta forma puede ser reducida fácilmente:

$$\frac{142560}{199584} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11} = \frac{5}{7}$$

La experiencia de observar que las fracciones intrincadas pueden reducirse a una forma simple produce un fuerte impacto en los alumnos. Con esto entran en contacto con lo esencial de las matemáticas.

En el ejemplo que antecede, hay un número único en el numerador y otro en el denominador; de ahí procedemos a fracciones hechas de productos que pueden tener tantos factores como uno quiera:

$$\frac{720 \times 588}{64 \times 945} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \quad \times \quad 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad \times \quad 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = 7$$

[Expansión de fracciones]

Lo opuesto de la reducción de fracciones es su expansión. Hay posibilidades sin límite para la expansión de una fracción:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$$

A través de ciertas expansiones, las fracciones 1/2, 1/3, 1/6, pueden ser expresadas como sextos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

El resultado muestra que el valor de 1/3 = 2/6 está a medio camino entre 1/6 y 1/2 = 3/6.

En los números cardinales sucesivos: 2, 3, 4, 5, 6, el número central 4, está a medio camino entre 2 y 6.

El caso es diferente en las fracciones sucesivas: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6. Aquí, en lugar de 1/4 se encuentra a medio camino entre 1/6 y 1/2, cosa que no sería posible si las diferencias entre las fracciones sucesivas fueran iguales una a otra.

En realidad, estas diferencias decrecen con el aumento de los denominadores, y ésta es la razón por la que las fracciones tienen que llevarse a un común denominador antes de que puedan sumarse o restarse.

Sin este conocimiento previo, las operaciones de suma y resta de fracciones parecen arbitrarias. Las operaciones en sí mismas son una aplicación de la expansión de fracciones:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

[División por fracciones]

Con la introducción de la división por fracciones, emprendemos una tarea que requiere enfrentarse a más de un aspecto de la operación.

Si tratamos la división meramente como dividir en partes, estamos en dificultades al explicar cómo dividir un objeto en 3/4 partes. Pero si en este caso atacamos la división como la operación opuesta a la multiplicación, el problema tiene un significado claro.

El multiplicar un número por una fracción, por ejemplo: 12 x 3/4, significa hacerlo tres veces más grande y cuatro veces más chico:

$$12 \times \frac{3}{4}=\frac{12 \times 3}{4}=9$$

La operación opuesta lo hace tres veces menor y cuatro veces mayor:

$$12 \div \frac{3}{4}=\frac{12 \times 4}{3}=16$$

Aplicando ambas operaciones al mismo tiempo, regresamos al 12:

$$\frac{12 \times 3 \times 4}{4 \times 3}=12$$

Lo mismo se aplica al multiplicar o dividir una fracción por otra fracción:

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2 \times 3}{3 \times 4}=\frac{1}{2}; \qquad \frac{2}{3}\div\frac{3}{4}=\frac{2 \times 4}{3 \times 3}=\frac{8}{9}$$

Ambas operaciones, aplicadas al mismo tiempo, nos llevan de nuevo a la fracción original:

$$\frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 3}=\frac{2}{3}$$

[Fracciones decimales]

Finalmente, en la introducción de fracciones decimales podemos comenzar con una pregunta, la respuesta a la cual nos enseñará lo que ganamos con introducir una segunda forma de fracciones.

La pregunta es:

"¿Qué es mayor 5/13 o 12/29?"

Las fracciones comunes no nos dicen siempre sus tamaños relativos, pero sí las fracciones decimales.

Realizando la división 5 ÷ 13 y 12 ÷ 29 más allá de la coma decimal, obtenemos:

$$5 \div 13 = 0{,}38461\ldots$$
$$12 \div 29 = 0{,}41379\ldots$$

y aprendemos que 12/29 es mayor que 5/13

Investiguemos, pues, las fracciones decimales:

$\frac{1}{2}=0{,}5$ $\qquad$ $\frac{1}{9}=0{,}11111\overset{\frown}{1}\ldots$

$\frac{1}{3}=0{,}33333\overset{\frown}{3}\ldots$ $\qquad$ $\frac{1}{10}=0{,}1$

$\frac{1}{4}=0{,}25$ $\qquad$ $\frac{1}{11}=0{,}0909\overset{\frown}{09}\ldots$

$\frac{1}{5}=0{,}2$ $\qquad$ $\frac{1}{12}=0{,}08333\overset{\frown}{3}\ldots$

$\frac{1}{6}=0{,}16666\overset{\frown}{6}\ldots$ $\qquad$ $\frac{1}{13}=0{,}076923\overline{076923}\ldots$

$\frac{1}{7}=0{,}142857\overline{142857}\ldots$ $\qquad$ $\frac{1}{14}=0{,}0714285\overline{714285}\ldots$

$\frac{1}{8}=0{,}125$ $\qquad$ $\frac{1}{15}=0{,}06666\overset{\frown}{6}\ldots$

Algunas fracciones decimales llegan a un final, como 1/2, 1/4, 1/5, 1/8, 1/10; otras continúan indefinidamente. En las fracciones 1/3, 1/6,1/9, 1/12, 1/15, encontramos la repetición sin fin de un mismo número: en 1/3 del 3, en 1/6 del 6, en 1/9 del 1, en 1/12 del 3 nuevamente. Los denominadores de todas estas fracciones pertenecen a la tabla del 3.

Cualquiera que sea la fracción que consideremos, cuando sus decimales desembocan en una secuencia infinita de un mismo número, su denominador estará en la tabla del 3, por ejemplo:

$1/24 = 0{,}041666\ldots$ ó $5/9 = 0{,}555555\ldots$

La fracción 1/11 muestra una repetición sin fin de los dos números 0 y 9. También las fracciones restantes 1/7, 1/13, 1/14, tienen repeticiones en sus decimales, pero se repiten en grupos de 6 números.

Estas observaciones estimulan una variedad de preguntas: ¿Cuáles fracciones decimales llegan a un fin y cuáles siguen sin limite? ¿Todas las fracciones comunes, cuando se transforman en decimales que continúan sin fin, producen repeticiones de sus decimales o hay algunas sin repetición?

Tenemos secuencias (períodos) de 1, 2 y 6 decimales. ¿Hay también decimales con periodos de 3, 4, 5 o superiores al 6? Muchos ejercicios y mucha práctica pueden obtenerse durante la búsqueda de estas respuestas.

Son como siguen: únicamente llegan a un final las fracciones cuyos denominadores están formados exclusivamente de factores del 2 o del 5. De hecho, terminan exactamente con tantos decimales como el número de factores de 2 o 5, lo que sea mayor.

Fracción	Número de decimales	Factoreo	Número de factores
1/16 = 0,0625	4	16 = 2 x 2 x 2 x 2	4
1/125 = 0,008	3	125 = 5 x 5 x 5	3
1/400 = 0,0025	4	400 = 2 x 2 x 2 x 2 x 5 x 5	4 [de 2]

Todos los decimales que continúan sin fin muestran repeticiones, sin excepción. En ocasiones, tenemos que calcular mucho antes que comience la repetición, pero tarde o temprano comenzará.

Con 1/17 tenemos que ir a través de 16 decimales antes de que comience una repetición en la secuencia.

Hay también fracciones decimales con períodos de tres números únicamente, la primera es 1/37.

Hay fracciones decimales con períodos de cuatro números, la primera es 1/101; y con cinco números, la primera es 1/41.

En otra ocasión, podemos comparar las fracciones decimales que tienen el mismo denominador:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\overline{142857}\ldots \qquad \frac{4}{7} = 0{,}571428\overline{571428}\ldots$$

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\overline{285714}\ldots \qquad \frac{5}{7} = 0{,}714285\overline{714285}\ldots$$

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\overline{428571}\ldots \qquad \frac{6}{7} = 0{,}857142\overline{857142}\ldots$$

Los decimales de 1/7 contienen los números 1, 2, 4, 5, 7, 8, y están ausentes 3, 6, 9 y 0. Los decimales para las otras fracciones contienen los mismos guarismos, y los mismos ausentes. Si los leemos comenzando con el 1, encontraremos que el resto de los guarismos siguen la misma secuencia que en 1/7.

[Mínimo común múltiplo y Máximo común divisor]

Las operaciones con fracciones nos conducen a dos conceptos cuyas aplicaciones van más allá del dominio de las fracciones en sí mismas. Uno de estos es ‘el mínimo común múltiplo,’ el otro es ‘el máximo común divisor’ de dos o más números.

Ambos conceptos están relacionados con la expansión de números en productos de sus factores primos. Por ejemplo, para los números 60 y 48 obtenemos:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array} \quad 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \quad 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

El mínimo común múltiplo contiene todos los factores primos, tantas veces como corresponde o su máxima frecuencia en uno de dichos números. En el ejemplo de 60 y 48 obtenemos:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 240$$

Este mínimo común múltiplo es, a la vez, el nuevo denominador para sumar las fracciones 1/60 + 1/48. Llevemos a cabo la suma:

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{48}=\frac{1 \times 4}{60 \times 4}+\frac{1 \times 5}{48 \times 5}=\frac{4}{240}+\frac{5}{240}=\frac{4+5}{240}=\frac{9}{240}=\frac{3}{80}$$

El máximo común divisor es el producto de todos los factores primos que ambos números tienen en común. En el caso de 60 y 48 obtenemos por el máximo común divisor:

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

Cuando reducimos la fracción 60/48, dividimos tanto el numerador como el denominador por su máximo común divisor:

$$\frac{60}{48}=\frac{5 \div 12}{4 \times 12}=\frac{5}{4}$$

Con esta factorización en primos han comenzado muchas investigaciones cuya historia se remonta a siglos y milenios. De acuerdo con el testimonio de Jámblico de Calcis,[4] Pitágoras[5] —quien no dejó trabajos escritos, pero cuyas enseñanzas han sobrevivido a través de las edades y han sido citadas y recitadas por sus estudiantes y discípulos— expresó su definición de la amistad a través de la relación de un par de números: 220 y 284, que aún se

4 Jámblico o Jámblico de Calcis o Yámblico (ca. 245-ca. 330): Filósofo griego neoplatónico y neopitagórico. insistía sobre todo en el poder rector de la mente, o intelecto, en el rechazo al materialismo y en la existencia de un alma eterna e inmaterial. [n. del pr.]

5 Pitágoras de Samos (ca. 569 aC–ca. 475 aC): Filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro. Contribuyó en el avance de la matemática, la geometría y la aritmética, derivadas particularmente de las relaciones numéricas, y aplicadas a la teoría de pesos y medidas, a la teoría de la música o a la astronomía. [n. del pr.]

llaman en la teoría de los números los 'números amigos.'[6]

De hecho, este par de números muestran particularidades que no fueron encontradas en otro par de números hasta 2.000 años después de la muerte de Pitágoras.

El segundo par fue descubierto por el matemático francés Fermat[7] en el año de 1636. Es 17.296 y 18.416.

El tercer par fue descubierto en 1638 por Descartes:[8] 9.363.584 y 9.437.056.

En el siglo siguiente, Leonard Euler,[9] el gran matemático de Basilea, Suiza, extendió la lista de números amigos a más de 60.

[6] Números amigos: Son dos números enteros positivos a y b tales que la suma de los divisores propios de uno es igual al otro número y viceversa. [n. del pr.]

[7] Pierre de Fermat (1601-1665): Jurista y matemático francés. Junto con René Descartes uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Descubrió el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz, fue cofundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal e independientemente de Descartes, descubrió el principio fundamental de la geometría analítica. Es más conocido por sus aportaciones a la teoría de números en especial por el conocido como 'último teorema de Fermat,' que recién fue fue demostrado en 1995. [n. del pr.]

[8] René Descartes o Renatus Cartesius (1596-1650): Filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, así como uno de los nombres más destacados de la revolución científica. [n. del pr.]

[9] Leonhard Paul Euler (1707-1783): Matemático y físico suizo. Realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos, análisis matemático, y trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía. Una afirmación atribuida a Pierre Simon Laplace expresa la influencia de Euler en los matemáticos posteriores: "Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros." [n. del pr.]

En 1929, Paul Poulet[10] publicó una lista extensa de números amigos que ha sido recientemente continuada por E. B. Escott,[11] llegándose al conocimiento actual de 390 pares.

Entre ellos, el par en segundo lugar por simplicidad después del par clásico (220 y 284), fue descubierto por un niño italiano de 16 años, Nicolo Paganini: (1184 y 1210).[12]

La característica de los pares de números amigos es: todos los divisores de uno de los números del par (no incluyendo el número mismo), denominados 'pares alícuotas,' al sumarse dan el otro número.

Así, para el par clásico obtenemos las siguientes partes alícuotas:

220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110
284: 1, 2, 4, 71, 142

Sumando las partes alícuotas de 220 obtenemos 284, y sumando las de 284 obtenemos 220.

Los mismos números que producen uno de los números amigos por multiplicación, producen el otro por suma y viceversa. Esta relación numérica no requiere siquiera que ambos números tengan factores en común.

La 'amistad' derivada de cualquier forma de igualdad se basaría en el egoísmo, buscando alguien como uno mismo.

[10] Paul Poulet (1887-1946): Matemático belga que hizo varios aportes importantes a la teoría de los números, incluyendo los 'números sociables' en 1918, y calcular los números pseudoprimos en base dos, y publicó los 43 números multiperfectos y los primeros dos números octo-perfectos. [n. del pr.]

[11] E. B. Escott. [Se encontraron referencias a sus trabajos, pero ninguna información biográfica.] [n. del pr.]

[12] Nicolo Paganini: [No se encontró información biográfica.] [n. del pr.]

En cambio, la relación de los números amigos de Pitágoras es completamente funcional. Un número se construye por multiplicación (operación interna), tal como el otro se construye por adición (operación externa) o viceversa.

Obviamente, todo par de números amigos ha de estar constituido por un número cuyas partes alícuotas al sumarse producen un número, superior al original, y otro, cuyas partes alícuotas al sumarse producen un número inferior al original.

El primer tipo de números se llama 'abundantes'; el segundo se llama 'deficiente.'

Hay números abundantes cuyas partes alícuotas suman un número tan sólo ligeramente arriba del número original, y otros en los cuales se alcanza el doble, como es el caso, por ejemplo, con: 120, o 672, o 523.776; o el triple: 30.240 o 32.760, etcétera.

Midiendo la abundancia por la relación entre la suma de las partes alícuotas y el número original, la abundancia más alta entre los números hasta el 20 se encuentra en el número 12 (suma de alícuotas: 16; abundancia: 1,333…); para los números hasta el 100, en el número 60 (suma de alícuotas: 108; abundancia: 1,8); para los números hasta el 500, en el número el 360 (abundancia: 2,25).

Reconocemos en ellos los números que sirven de base a los sistemas tradicionales de medición; ofrecen el máximo de oportunidades para ser subdivididos.

La posición intermedia entre los números abundantes y los deficientes la ocupan números cuya suma de sus pares alícuotas no cae ni arriba ni abajo del número original, sino que es igual a él. Tales números se llaman 'números perfectos.'[13]

En la actualidad se conocen solamente doce números perfectos.[14]

Los primeros tres son 6, 28 y 496. El cuarto es 8.128 y, de ahí en adelante, son de valores muy altos. Probando los primeros tres números perfectos, obtenemos las siguientes partes alícuotas:

	Partes alícuotas	Sumas
6:	1, 2, 3	1 + 2 + 3 = 6
28:	1, 2, 4, 7, 14	1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28
496:	1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248	1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496

El tremendo trabajo que se ha hecho en la investigación de los números ilustra el impulso de los investigadores de las matemáticas puras. El mayor número perfecto conocido es: ♣

$170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727 \times 2^{136}$

[13] Número perfecto: Número natural que es igual a la suma de sus divisores propios positivos,. Dicho de otra forma, un número perfecto es aquel que es amigo de sí mismo. Así, 6 es un número perfecto porque sus divisores propios son 1, 2 y 3; y 6 = 1 + 2 + 3. [n. del pr.]

[14] En la actualidad (mayo 2015) se han encontrado 48 números perfectos pares. Se ignora si existen números perfectos impares. Uno de los problemas no resueltos de las matemáticas es si existe o no un número infinito de números perfectos. [n. del pr.]

7 aritmética aplicada

En el Plan de Estudios de las escuelas Waldorf la aritmética aplicada tiene preponderancia durante los grados superiores de la primaria, mientras que en los grados inferiores se hace énfasis en estudiar los números y en ampliar la actividad mental del niño. La transición entre las dos formas de enseñanza corresponde al cambio de la vida del niño a un período preeminentemente real y de intereses prácticos. Cada uno de los problemas atacados en aritmética aplicada pueden ser elegidos y presentados para servir como abreojos para múltiples aplicaciones prácticas.

Para realizar este ideal debe tenerse presente lo siguiente. Si durante una misma época de instrucción pasamos de un primer problema que trata de líneas de tubería llenando un tanque a otro problema que trata de hallar cuándo se cruzarán dos puntos al moverse uno hacia el otro a velocidades dadas, desde extremos opuestos a una cierta distancia, y después a un tercero problema que se refiere a comprar y vender, no podemos esperar despertar más que un interés superficial.

Será enteramente diferente si los problemas se elaboran y presentan como una secuencia continua de investigaciones.

Como ejemplo, tomemos un día el tema de túneles. Para comenzar, hablemos de un túnel en la vecindad bien conocido para la mayoría de la clase, por ejemplo, el túnel Lincoln en el área de Nueva York. Fue abierto en 1938 y tiene una longitud de 2,47 kilómetros.

Entonces preguntamos:

> *"¿Cuál es el túnel más largo para carretera o ferrocarril, en los Estados Unidos?"*

Respuesta: el túnel Cascade del sistema ferroviario del Great Northern, 160 kilómetros al Este de Seattle. Tiene 12,54 kilómetros y fue terminado en 1929.

> *"¿Hay túneles para carretera o ferrocarril aún más grandes, en alguna parte del mundo?"*

Sí, existen cuatro únicamente. Uno de ellos está en Italia en el ferrocarril Boloña-Florencia cerca de Lagara, inaugurado en 1934 con una longitud de 18,62 kilómetros. Los otros están en Suiza, uno de ellos en la frontera entre Suiza e Italia. Todos ellos son túneles para ferrocarril.

Túnel	Apertura	Longitud
Loetschberg	1912	14,62 km
San Gotardo	1882	15,07 km
Simplón	1906	19,92 km

El túnel Simplón es el túnel de ferrocarril más largo del mundo; es 19,92 / 2,47 = 8,06 veces más largo que el túnel Lincoln. La longitud de este último es, por consiguiente, el 12.40% (2,47 / 19,92 = 0,1240) de la longitud del túnel Simplón. Suponiendo que se camine a razón de 4,8 kilómetros por hora tomaría 19,92 / 4,8 = 4.15 horas, o sean 4 horas 9 minutos.

"¿Cuánto le tomaría a un tren cruzar el túnel Simplón a una velocidad de 65 kilómetros por hora?"

Respuesta: 19,92 / 65 = 0,3065 horas, algo más de 18 y medio minutos.

La perforación del túnel Simplón comenzó el 13 de agosto de 1898. La sección desde el norte se reunió con la sección desde el sur el 24 de febrero de 1905.

"¿Cuántos días se necesitaron para verificar esta unión y cuál fue el avance promedio por día en la perforación del túnel?"

Con objeto de calcular el tiempo, consideremos que la cantidad de días en un año es igual a 365,2425… (365 + 1/4 - 1/100 + 1/400). Con objeto de añadir 1/4 de día por año, o un día cada cuatro años, se han añadido los años bisiestos para los años cuyo número es divisible por cuatro. Para substraer 1/100 de día o un día en 100 años, se quita un año bisiesto cada 100 años, en el año del siglo.

Finalmente, para añadir 1/400 de día, o un día en 400 años, volvemos a añadir el año bisiesto cada 400 años, en los siglos cuyo número de centenas sea divisible por cuatro. Así 1900 no fue año bisiesto, pero sí lo será 2000.

Contando los días necesarios para el avance del túnel Simplón obtenemos:

Año	Fechas	Días
1898	Agosto 13 al 31	19
	Septiembre	30
	Octubre	31
	Noviembre	30
	Diciembre	31
1899		365
1900		365
1901		365
1902		365
1903		365
1904		366
1905	Enero	31
	Febrero 1 al 24	24
	Total	2387

Para calcular el progreso promedio por día, tomemos la longitud total del túnel Simplón (19,92 km) y la dividimos por la cantidad de días: 19920 / 2387 = 8,35 metros por día.

Una ventaja especial del túnel Simplón es que la vía del ferrocarril no tiene que subir a la entrada del túnel: comienza al nivel del Valle del Ródano. Comparemos los niveles de cinco túneles alpinos sobresalientes:

Túnel	Altura sobre el nivel del mar
Arlberg	1310 m
Mont Cenis	1294 m
Loetschberg	1230 m
San Gotardo	1154 m
Simplón	705 m

Durante la construcción del túnel Simplón se encontraron graves obstáculos. Los más dificultosos fueron la aparición de torrentes de agua helada y caliente dentro de la montaña.

Llegaron a ser especialmente dificultosos en un punto a 10.378 metros de la entrada norte, al grado que el trabajo tuvo que interrumpirse el 18 de mayo de 1904 y construirse un muro de piedra transversal al túnel para detener el flujo de agua.

Desde este punto en adelante, la construcción del túnel se continuó desde el sur únicamente hasta entroncar con la otra sección y se proveyó una salida para el agua caliente. La temperatura del agua en el punto crucial fue de cerca de 50ºC con máximo de 54ºC.

"¿A qué temperatura corresponde en la escala Fahrenheit?"

La Figura 7-1 muestra tres escalas termométricas indicando los puntos de congelación y ebullición del agua. La escala centígrada está a la izquierda y la escala Fahrenheit a la derecha; en el centro está una escala auxiliar, intermedia entre ambas.

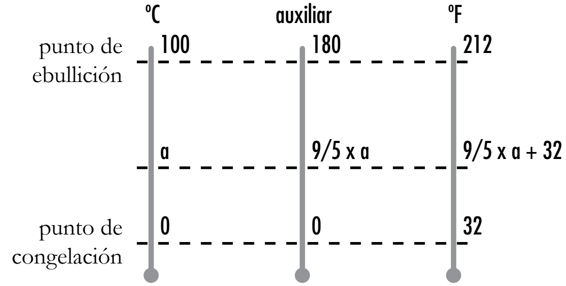


Figura 7-1. Tres escalas termométricas

Las lecturas en la escala intermedia son proporcionalmente mayores que en la escala centígrada, en la relación 180/100 = 9/5 y la tercera escala añade 32° a las lecturas de la segunda. Por consiguiente, para obtener de una lectura centígrada cualquiera (ºC), la lectura correspondiente en Fahrenheit (ºF), hacemos uso de la fórmula siguiente:

$$°C \times \frac{9}{5} + 32 = °F$$

de modo que para el problema planteado previamente obtenemos para 50°C:

$$50\ ^{\circ}\mathrm{C} \times \frac{9}{5} + 32 = 122\ ^{\circ}\mathrm{F}$$

y para la máxima temperatura de 54°C:

$$54\ ^{\circ}\mathrm{C} \times \frac{9}{5} + 32 = 129{,}2\ ^{\circ}\mathrm{F}$$

Estas temperaturas hicieron prohibitivo el continuar el trabajo, particularmente por la humedad y condiciones generales dentro del túnel.

Una revisión de los pasos involucrados y de los conceptos incluidos dentro de este ejemplo, muestran las siguientes operaciones:

- las cuatro operaciones con enteros y decimales,
- fracciones comunes,
- divisibilidad,
- porcentaje,
- conversión de diferentes unidades de longitud y temperatura, y
- conceptos básicos del calendario.

Problemas de este tipo harán que los estudiantes se den cuenta que el conocimiento adquirido en sus clases de aritmética es útil para diferentes asuntos de interés y para múltiples aplicaciones. ♣