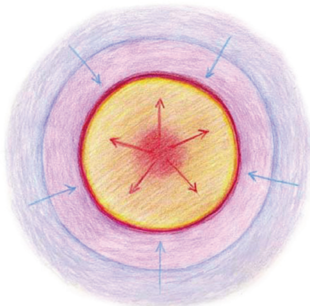
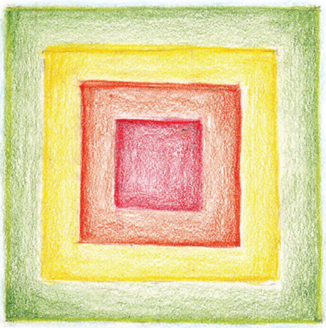
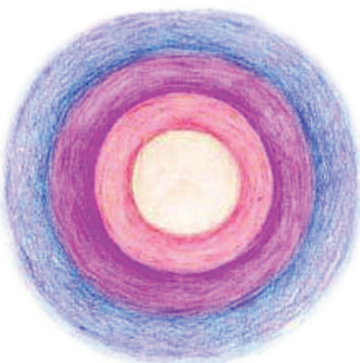


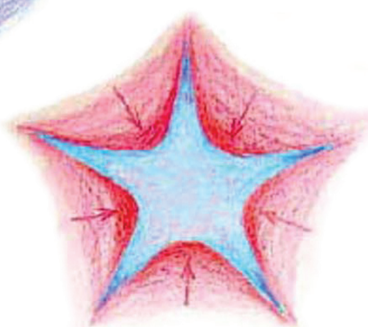


Lecciones de Geometria en la Escuela Waldorf

Volumen 2: Dibujo de formas a mano alzada y construcciones geométricas básicas en los grados 4 y 5



por Ernst Schuberth



Lecciones de Geometria en la Escuela Waldorf

Lecciones de Geometria en la Escuela Waldorf

Volumen 2:
Dibujo de formas a mano alzada y
construcciones geométricas básicas en los grados 4 y 5

por

Ernst Schuberth

Waldorf
PUBLICATIONS

Impreso con el apoyo de Waldorf Curriculum Fund

Publicado por:

Waldorf Publications at the
Research Institute for Waldorf Education
351 Fairview Avenue, Suite 625
Hudson, NY 12534

Título original: *Geometry Lessons in the Waldorf School*
Volume 2: Freehand Form Drawing and Basic Geometric Construction in Grades 4 and 5

Autor: Ernst Schuberth
Traducción de: Nina Kuettel
Editor: David Mitchell
Lectura de prueba: Ann Erwin
Diseño de la portada: Hallie Wootan

ISBN # 1-888365-52-8

Contenidos

Prefacio

Este libro es parte de una presentación en varios volúmenes, que abarca lecciones de geometría en los grados primero a octavo en las escuelas Waldorf. Tres niveles son presentados a la luz de las etapas del desarrollo de acuerdo a la antroposofía: el primero comprende los grados 1 a 3; el segundo, los grados 4 y 5; y el tercero, los grados 6 a 8. En su compilación *El Currículo de la Escuela Waldorf de Rudolf Steiner*, E.A.K. Stockmeyer fue el primero en advertir el espejeo de las etapas de desarrollo en las lecciones de geometría[1].

En el primer nivel, la geometría es fomentada, en el dibujo de formas, como *geometría activa*. El niño aprende a adquirir y crear formas de diversas maneras. El niño educa su motricidad fina y desarrolla un sentir para el lenguaje de formas – un sentir de la forma es desarrollado. En el segundo nivel, la relación entre una forma y otra pasa al plano frontal. Stockmeyer llamaba a esto la *geometría comparativa*. En el tercer nivel comienza lo que tradicionalmente es llamado la verdadera geometría: *geometría demostrativa*.

En este libro, se tratará de presentar los contenidos y relaciones de cada nivel particular como estructura potencial. Yo recomiendo esta estructura sólo como sugerencia para el maestro y su práctica independiente. Sería contradictorio para la autonomía del maestro Waldorf si un posible camino para hacer algo se presentara dogmáticamente. Espero con entusiasmo que mis colegas maestros compartan conmigo sus experiencias y me pasen a su vez sugerencias para continuar desarrollando esta presentación.

Tengo muchos colegas a los cuales agradecer, cuyo trabajo he estudiado en diferentes medidas, en varias oportunidades. Querría agradecer también a los niños con los que tuve el privilegio de trabajar, así como a mis amigos del departamento de Matemáticas y Astronomía en el Goetheanum. A partir de nuestra larga colaboración, he sido capaz de adquirir ciertas perspectivas espirituales que han ayudado a mi entendimiento de las matemáticas. Mis agradecimientos también a Monika Feles Baumann, quien transcribió la mayor parte del manuscrito original.

Desde principios de los noventas, he tenido la oportunidad de trabajar con muchos maestros de clase y preparatoria en Norte América. Su maravillosa habilidad de sentir lo que piensan, su entusiasmo y su amistad, me han inspirado a continuar mi casi simultáneo trabajo en ocho libros (cuatro en geometría y cuatro en matemáticas) para maestros de clase.

Con suerte, seré capaz de terminar los dos últimos como está planeado. Por favor, envíenme retroalimentación si tuvieron experiencias interesantes con el libro. Permítanme saber sus ideas, sus formulaciones de ejercicios, problemas, o cualquier otra cosa que pudiera ser importante mejorar en el libro. Y, por último, aunque no menos importante, debo agradecer a mi colega y amigo David Mitchell y su equipo en AWSNA Publications por el tremendo trabajo puesto en lograr este libro, particularmente a Nina Kuettel por la traducción y Ann Erwin por la edición.

– Ernst Schuberth, Primavera 2004
Ernst.Schuberth@t-online.de

Introducción

En algún momento alrededor de los diez años, los niños atraviesan una transformación espiritual que los coloca en una relación más consciente con el entorno. Una de las maneras en que el currículo Waldorf acompaña este cambio es, primero, presentando y discutiendo a los animales, luego las plantas y, en el sexto grado, los minerales. Un acercamiento apropiado a la edad es presentar al reino animal vinculándolo con la vida física del hombre, y al reino vegetal con la vida del alma.

Una descripción comparativa de las formas geométricas más simples, tales como el círculo, el triángulo y el cuadrado, puede introducirse utilizando un método similar. El niño aprende a mirar a las formas individuales de manera consciente, nombrar a las diferentes formas, y diferenciar factores particulares que las determinan. Por lo tanto, no corresponde que una forma preceda a otra, como ocurre del sexto grado en adelante, sino que las formas serán presentadas en relación *comparativa* una con la otra.

La siguiente estructuración sugerida puede, desde luego, verse como *una* posibilidad. Currículos diferentes al abordado aquí son sin duda concebibles. Con el dibujo de formas comparativo, estoy interesado en tener las formas más perfectas (círculo, cuadrado, triángulo equilátero) como punto de partida, para después permitir a las formas menos simétricas, derivar de éstas. Percibo que esto corresponde al estudio de la naturaleza en el hecho de que primero se discute al ser humano como un tipo de arquetipo que abarca las formas individuales encontradas en la naturaleza.

Sugiero que las construcciones elementales, básicas, con compás y regla, se realicen hacia el final del quinto grado. He experimentado una y otra vez con qué entusiasmo este grupo de edad completa la transición del dibujo de formas y la geometría a mano alzada, a un proceso de construcción descriptiva. Calendarizarlo de esta manera, además permite efectivamente introducir la geometría demostrativa en el sexto grado.

Otro interés del siguiente plan, es el entendimiento del concepto de espacio de acuerdo al desarrollo del niño. Si en los primeros años el niño tiene un concepto básicamente plano del espacio, entonces, durante la etapa de desarrollo conocida como el cambio de los diez años, el niño comienza a tener un entendimiento interior más claro de la tercera dimensión. A pesar de que la geometría espacial (excepto, quizás el lidiar con el poliedro regular y cálculos simples de volumen) está reservada para los grados superiores, ciertamente observaciones simples de la relación entre luz y sombra pueden contribuir a desarrollar la comprensión de conceptos espaciales. Una sugerencia para esto es ofrecida aquí sólo como ejemplo. Observaciones similares pueden entretejerse en las lecciones de geometría u otros bloques conforme las oportunidades se presenten.

Una palabra acerca de los dibujos: los dibujos a mano alzada fueron esbozados en su mayoría con lápiz claro y luego repasados con lápiz más oscuro. En otras instancias, compás y regla fueron utilizados de manera que se volvieran más evidentes las respectivas leyes geométricas a las que se habría tratado de llegar en el dibujo a mano alzada. Posteriormente, para mantener el carácter de dibujo a mano alzada, los diseños fueron trazados nuevamente con lápiz de color. Algunos ejercicios de dibujos a mano alzada fueron realizados para este libro con compás y regla, sólo como orientación, no como ejemplos modelo.

Los maestros siempre deben tener en cuenta que el dibujo en pizarrón requiere habilidades totalmente diferentes que el dibujar en papel. En cualquier caso, los maestros deben practicar en pizarrón con anticipación. Esto aplica tanto para el dibujo a mano alzada como en los dibujos construidos. *Cómo* dibuja el maestro es de importancia fundamental para el alumno. ¡La secuencia como tal de movimientos (si la mano está calmada o nerviosa, si la presión es fuerte o débil) hace una impresión considerable que los niños absorben, y que determina su relación con la materia!

Es recomendable y de ayuda que, con los dibujos difíciles a mano alzada, se bosquejen las posiciones y puntos importantes. El éxito depende de una buena preparación. Si el maestro irradia confianza en las habilidades de los niños, y los guía calmada y claramente, entonces los niños pueden lograr cosas asombrosas. Además, el niño también está educando directamente su constitución: coordinación ojo-mano, habilidades motoras finas y mucho más.

Una desventaja considerable de los dibujos en este libro, es la carencia de color. Por esto hemos incluido un CD Rom con dibujos coloreados, ejercicios suplementarios y notas adicionales. Siéntanse libres de usar el material, pero por favor no violen los derechos de AWSNA o el autor imprimiendo el material o colocándolo en su sitio web sin permiso. Los ejemplos deberían estimular sus propias habilidades creativas. Por favor noten que, en cualquier caso, se debe evitar el coloreado sin sentido, la decoración con flores u otros elementos por el estilo. La belleza del dibujo geométrico yace en la adherencia interna a las leyes geométricas que éste revela, y usualmente penetra mucho más hondo de lo que puede notarse en la superficie. En la medida en que el niño viva activa y comparativamente en el mundo de las formas geométricas, podrá cultivar esa relación que posteriormente permitirá surgir cuestiones de conocimiento en el alma, y guiar a un modo verdaderamente matemático de mirar las cosas.

El Cuarto Grado

"Y ahora podemos pasar a la geometría en esta edad, dado que ya hemos abordado aquello que se convertirá en geometría, completamente desde el dominio del reino del dibujo. Con el dibujo podemos desarrollar el triángulo, el cuadrado, el círculo y la línea para el ser humano. Desarrollamos las formas en sí a través del dibujo, conforme dibujamos y decimos: 'Este es un triángulo, este es un cuadrado.' Pero lo que aparece como geometría, donde buscamos la relación entre formas, esto lo comenzamos sólo hasta los nueve años"[2].

Con estas palabras, Rudolf Steiner creó un ímpetu por el dibujo de formas, en el cual, las características internas del estudio en paralelo del hombre, los animales y las plantas, se presenta con mayor detalle. Yo veo especialmente una relación interna con el desarrollo metodológico de lo anterior, al producir *relaciones comparativas* y el dibujo sobre ciertas *formas arquetípicas*. Así que el triángulo y el cuadrángulo surgen del círculo, y el cuadrado común surge del cuadrángulo. Cómo ocurre esto en una base individual, será mostrado en las siguientes páginas. Ciertamente, aquí sólo se presentarán *posibilidades*. Estos tópicos pueden ser reemplazados por otros, o conducidos más fuertemente hacia lo puramente artístico.

Cada maestro puede decidir por sí mismo dónde hay un lugar apropiado para el dibujo geométrico de formas en el plan de lecciones. Por ejemplo, como parte de un bloque de dibujo de formas, o adherido al final de un bloque de aritmética sin duda sería apropiado. Tomando en cuenta las estaciones, siempre encuentro que el invierno es el mejor tiempo para tener lecciones principales de geometría. Conduciendo hacia la geometría.

Conduciendo hacia la geometría

Del círculo a la elipse

John[3] es llamado al frente de la clase, y se le pide que camine un círculo. El maestro dibuja un círculo en el pizarrón y señala la conexión entre el círculo caminado y el círculo dibujado. " John ha caminado un círculo en el suelo. Yo también completé un movimiento circular con mi mano, y conforme seguían lo que dibujaba mi mano, ustedes también hicieron un movimiento circular con sus ojos. Ustedes pueden ver el *trazo* de mi movimiento sobre el pizarrón porque tenía un trozo de gis en mi mano. Así fue como el círculo se hizo visible en el pizarrón. Primero estuvo ahí el movimiento. Con este círculo, aún tenemos el *trazo* del movimiento, un *movimiento trazado.*"

Es importante señalar la conexión entre el círculo caminado y el dibujo en el pizarrón. A menudo, ocurrirán problemas de comprensión en los niños cuando se transita de una forma a otra sin discutir cuidadosamente la conexión entre ellas. El movimiento del niño frente a la clase es experimentado como una actividad tridimensional. El dibujo en el pizarrón parece al niño (especialmente cuando el movimiento del trazo ha terminado) más bien bidimensional y similar a una imagen. Éste pierde su carácter tridimensional asociado con todas las actividades físicas. Es por esto que resulta tan importante mostrar cómo esta imagen llegó a ser a partir de una actividad, y cómo se hace visible a través del mirar que es, también, una actividad – el movimiento del ojo.

Naturalmente, los niños se han familiarizado bastante con el círculo, lo han hecho en dibujo de formas y en euritmia. De manera que ahora puedan entrar en una observación comparativa de la forma, el maestro camina el círculo y con repeticiones, lentamente estira la longitud del círculo hasta que la *elipse* se vuelve visible. Los niños pueden observar los cambios ocurridos: a cada extremo, las curvas se vuelven cada vez más pronunciadas y, en el medio, cada vez menos. Finalmente, uno concluye algo como esto: cuando uno camina el círculo, paso a paso se desplaza hacia adelante y *gira* uniformemente. Cuando uno camina la elipse, también se camina continuamente hacia adelante, pero la rotación es más pronunciada en los extremos, de lo que es en el medio. La rotación se vuelve rítmica.

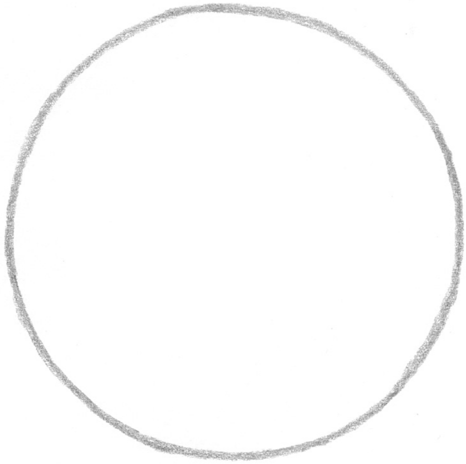


Fig. 1. El círculo como movimiento trazado

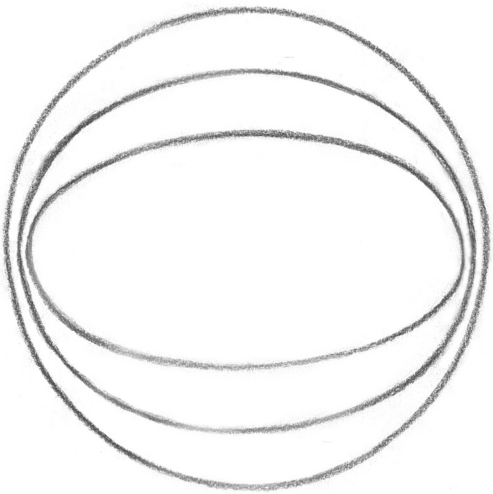


Fig. 2. Del círculo a la elipse

Cuando se camina una forma, uno debería tomarse su tiempo en este girar y caminar al frente. Ambos movimientos pueden hacerse por separado y, posteriormente, se pueden formular preguntas acerca de la diferencia entre los movimientos. Quizás se logra en este punto el que se diga: al caminar adelante, nuestro lugar cambia; al girar, la *dirección* en que miramos cambia.

Por lo tanto, girar y caminar adelante son movimientos completamente diferentes. Esto será bien comprendido cuando los dos movimientos sean considerados por separado. Ambos movimientos ejecutados simultáneamente al caminar un círculo, pueden provocar confusión en algunos niños. En la clase Waldorf que llevé en Munich, era especialmente un estudiante llamado John quien no podía verlo. Que se movía adelante era claro, pero que la rotación pudiera ocurrir al mismo tiempo le era incomprensible. Hice que diera vuelta en su sitio una vez y que me describiera lo que veía a su al rededor. Cuando una rotación se completó, había visto las cuatro paredes del aula. Una vez más caminó un círculo y describió lo que vio. Esta vez también había visto las cuatro paredes cuando el círculo fue completado. De alguna manera todo el asunto siguió pareciéndole sospechoso. Trate de nuevo con otra táctica: "Cuando das vuelta en tu lugar una vez, tus compañeros habrán visto todos tus lados. Camina en círculo una vez más y uno de tus compañeros describirá qué parte de ti puede ser vista." John así lo hizo y un compañero dijo: "Estómago, hombro izquierdo, espalda, hombro derecho, estómago.". Mientras John caminaba el círculo, otro alumno lo había visto desde todos sus lados, así como cuando rotaba en su lugar.

Al hacer esto, todos los otros niños se convencieron de que realmente algo estaba ocurriendo con la rotación cuando se caminaba un círculo. Sólo John permaneció dudoso. Así que dije: "Camina recto un pequeño tramo, y luego gira por unos instantes. ¿Cuál es la diferencia?" John hizo esto y dijo: "Girar me marea, caminar recto no."

"Bien," dije yo, "uno se marea cuando da vueltas, y uno da vueltas al caminar un círculo, por lo tanto, uno también debería marearse al caminar un círculo". Ahora John tuvo que caminar un pequeño círculo tan rápido como pudo y, sin duda, después de la quinta vuelta comenzó a marearse y así obtuvo su mareada creencia de que uno también rota cuando camina un círculo.

Uno puede representar los *lugares* a los que llega al caminar el círculo, uno tras otro, como los *puntos* del mismo. ¿Cómo podría uno indicar el cambio de dirección? El maestro puede pedirle a los niños que dibujen las respectivas líneas de visión con que uno mira desde los puntos individuales del círculo en el pizarrón. Se desarrolla algo como lo que hay en la siguiente figura (ver Fig. 3a).

Aquí, la línea de visión es indicada por rayos en la forma de medias tangentes. Cuando eso ha ocurrido, entonces se puede preguntar ahora sobre las líneas de visión que uno tendría al caminar el círculo en la dirección opuesta. Una imagen completa del círculo y sus tangentes se elabora. (Esto debe tratarse menos como geometría, y más inocentemente como una imagen). Si se le proporciona al niño un palo que pueda cargar debajo del brazo, y que éste apunte en su línea de visión mientras camina el círculo, entonces el niño podrá fácilmente observar la rotación de las tangentes (ver Fig. 3b).

Ahora podemos considerar nuevamente la elipse que se obtuvo desde el círculo, y completar el dibujo con tangentes. Cuando las tangentes a mano alzada han formado ángulos aproximadamente iguales, entonces se hace vívido su número creciente en los fuertemente curvados extremos (ver Fig. 4). Destaco con color la fuerte dinámica inherente a la rotación. En la curva más fuerte dibujo una línea roja, luego con una curvatura decreciente, naranja, amarillo y finalmente verde donde la curva es más débil. Si uno presta particular atención al movimiento de ambas formas arquetípicas –rotación y movimiento recto– entonces la experiencia de las diferencias entre el círculo y la elipse, ilumina más ampliamente la conciencia.

Ahora hagamos algo práctico a partir de su experiencia: los niños ya observan las estrellas. Sin quitar mucho de sus futuras lecciones de astronomía, uno puede describir el trayecto de las estrellas en su

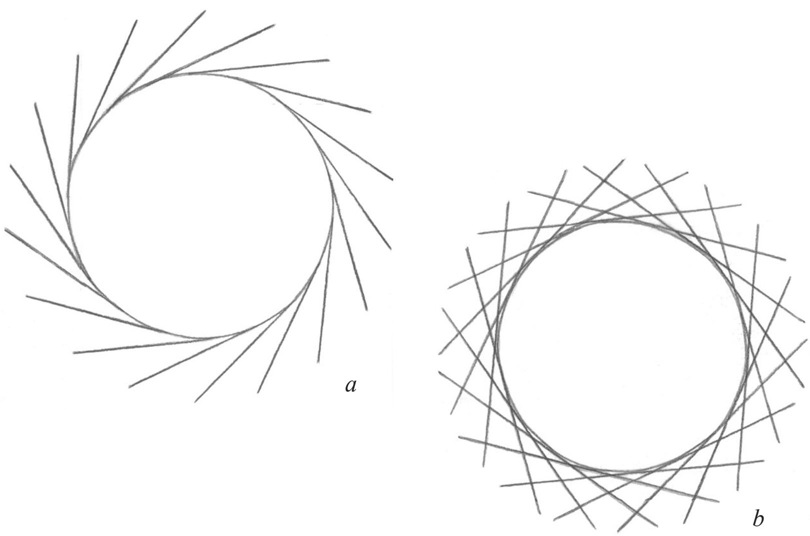


Fig. 3 a-b. El círculo y sus tangentes

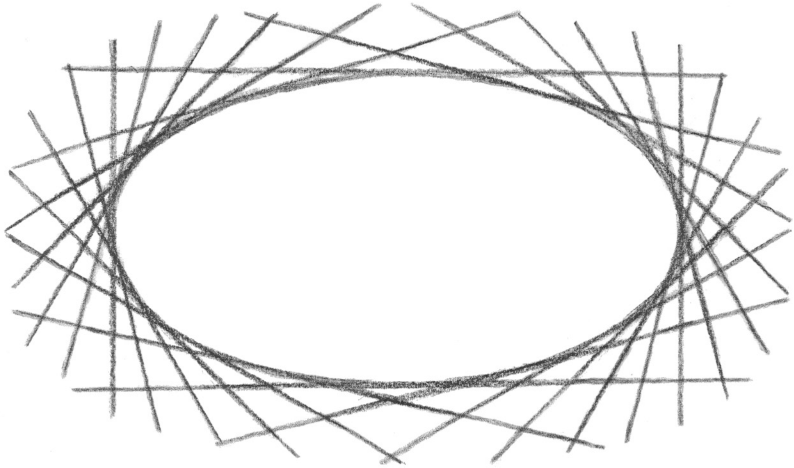


Fig. 4. La elipse y sus tangentes

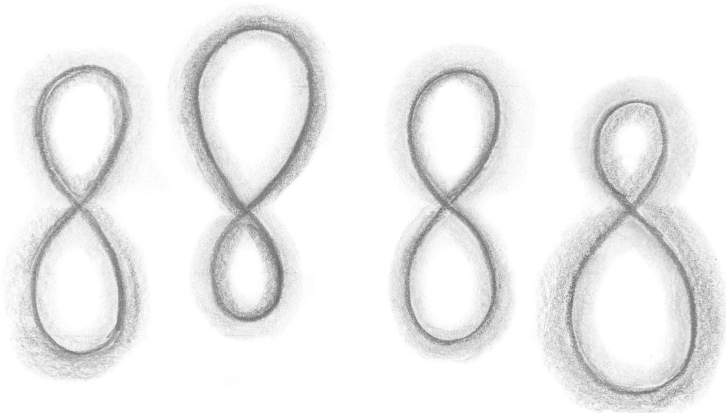
relación con las direcciones norte, sur, este y oeste. Algunos niños ya habrán notado que diferentes estrellas son visibles en el cielo nocturno en diferentes momentos del año. Quizás uno podría explicar en este punto lo que surgiría de una observación más exacta:

Si uno mira en la misma dirección a la misma hora cada noche, por ejemplo, al sur, entonces se observa que las mismas estrellas arriban a esta locación direccional más o menos cuatro minutos más tarde cada día. Después de aproximadamente 360 días (o más exactamente 365.25 días), esto es, después de un año, las mismas estrellas volverán a la dirección observada al mismo tiempo. Así que, noche tras noche, las estrellas en el cielo se desplazan ligeramente. Las culturas antiguas usaban este desplazamiento como medida del movimiento rotatorio y, como es más fácil lidiar con 360 que con 365.25, escogieron la fracción 1/360 de un ciclo completo de rotación, como la unidad para medir ángulos. Esta unidad de medición se conoce como un grado, y se escribe 1°. Mientras que las medidas de longitud (metro, yarda, y demás) fueron tomadas del hecho de que caminamos sobre la Tierra, las medidas para medir la rotación se originan del Cosmos. Es una medida cósmica. Es interesante destacar en este punto que, con los brazos estirados (imaginando su circunferencia envolvente), el ancho del pulgar aparenta ser poco menos de 1°.

El movimiento del sol en el cielo también está mapeado por el girar de las manecillas del reloj, siendo la diferencia que la manecilla pequeña completa una revolución *dos* veces cada veinticuatro horas, y no *una* vez, como el sol. Esto es porque, en tiempos pretéritos, la medida del tiempo se percibía como dos ciclos: día y noche. El tiempo entre el amanecer y el atardecer, y el tiempo entre el atardecer y el amanecer se dividía en doce horas. Naturalmente, esto hacía que las horas en verano y en invierno tuvieran diferentes duraciones. Hoy en día todavía pueden encontrarse viejos relojes de torres que tienen unos contrapesos que se colgaban al mecanismo del reloj para que éste fuera más lento o más rápido.

Los dos ciclos pueden ilustrarse con lemniscatas (ver Fig. 5), donde el círculo superior representa la duración del día y, el inferior, la duración de la noche. Durante el curso del año, la figura del ocho adopta formas cambiadas. El curso del año producía una medida rítmica, que respiraba para la gente en la antigüedad. Usualmente, una persona se habría levantado al amanecer y trabajaría hasta el atardecer. Posteriormente dormirían. Las horas de trabajo más largas en el verano eran compensadas por las horas más cortas en el invierno. Se podría decir que ambos ciclos del tiempo se han empalmado, uno sobre el otro, en la cara del reloj. Es por esto que las manecillas pequeñas rotan *dos* veces por el reloj en veinticuatro horas.

Hace mucho tiempo, en muchos lugares, las horas también se contaban diferente a como se cuentan hoy en día. El amanecer se consideraba la primera hora, después vendría la *segunda*, y así sucesivamente, hasta la *décimo segunda* hora, que terminaba al atardecer. Entonces la primera hora de la noche comenzaba. La *novena* hora del día[5] sería la que hay entre las 2:00PM y 3:00PM bajo las medidas que usamos actualmente. La Iglesia Católica Romana volvió rígidas las medidas del tiempo debido a las dificultades que surgían de sus varias órdenes religiosas, las reglas de oración y demás. Pusieron las horas del día y las de la noche juntas, y las dividieron en veinticuatro partes iguales. Así fue como nuestro sistema de medidas del tiempo surgió. Esto se volvió necesario cuando las tierras del Norte, donde las noches son muy cortas durante el verano, las órdenes religiosas no podían seguir las reglas que requerían que las oraciones ocurrieran a ciertas horas del día y la noche.



Primavera *Verano* *Otoño* *Invierno*

Fig. 5. Día y noche en su ciclo anual por estaciones

La medida de ángulos debe practicarse ahora, presentando ángulos en tantas medidas como sea posible. Aquí algunos ejemplos:

1. Darse vuelta 360°, 180°, 90° y 45°.
2. Hacer que los brazos formen ángulos de 90°, 180° y 45°.
3. Producir los ángulos anteriores usando ambos brazos.[6]
4. Dos niños caminan en ángulos particulares a partir de un mismo punto de partida y en direcciones diferentes. Aquí uno debe poner especial atención al trayecto del otro, de manera que pueda mantenerse el ángulo correcto. Entre menor sea el ángulo, más lentamente se separará uno del otro.
5. Se estima el tamaño de los ángulos que se encuentran en el entorno de los niños.

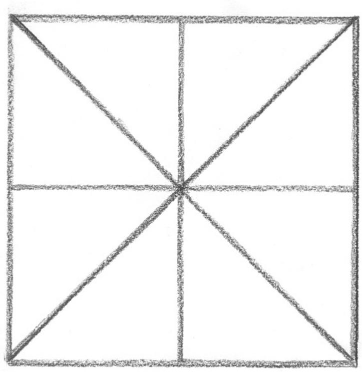


Fig. 6. ¿Qué ángulos pueden encontrarse en esta figura?

6. Buscar qué ángulos se encuentran en la Fig. 6.
7. Construir tu propio transportador (ver el CD Rom).

Ahora podemos describir con más precisión algo con lo que los niños se familiarizaron mucho en su primer año de dibujo de formas: hay ángulos amplios y ángulos reducidos. Un ángulo entre 0° y 90° se llama ángulo *agudo*, y uno que está entre 90° y 180° se llama ángulo *obtuso*. Un ángulo *recto* es de 90°. Un ángulo de 180° se llama *llano*. Un ángulo de 360° se llama ángulo *completo* (ver Fig. 7).

Obviamente, la conexión con la aritmética de fracciones puede venir a colación: la unidad es el ciclo de rotación completa. Uno puede dirigir a los niños a hacer un cuarto de vuelta, un tercio, media, y así sucesivamente, y también determinar el número de grados que corresponde a tales rotaciones. Un grado es 1/360 de la vuelta completa.

El reloj también ofrece oportunidades para practicar. Algunos ejemplos para tales tareas son: ¿Cuántos grados se mueve la manecilla larga en un minuto, en dos, tres, cuatro, cinco, diez, doce, quince, veinte, treinta y cuarenta y cinco? ¿Cuántos grados se mueve la manecilla corta en estos mismos períodos? (Siempre es 1/12 parte de lo que recorra la manecilla larga).

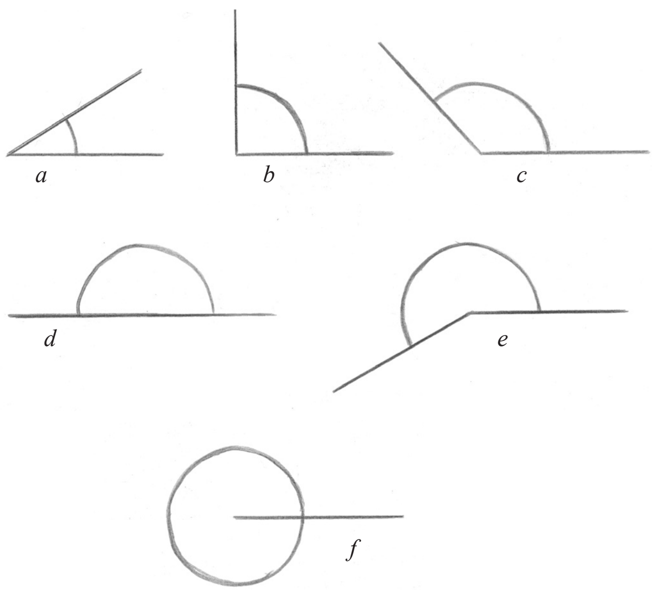
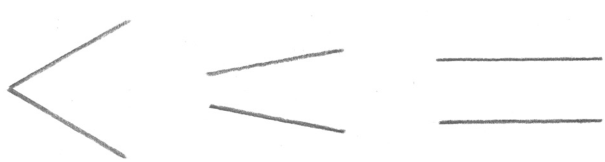


Fig. 7 a-f. Los distintos ángulos

Conectar la aritmética de fracciones a los giros angulares puede ayudar a prevenir que el frecuentemente usado concepto de fracciones como sectores del círculo (rebanadas de pastel) se convierta en una fijación unilateral en el entendimiento de las fracciones. Es importante evitar pensar en los ángulos como segmentos del círculo. Los segmentos del círculo son *áreas*. Los ángulos se forman de *direcciones*. Los segmentos de un círculo también pueden ser de diferentes tamaños, pero tener el mismo ángulo. Dependiendo del tamaño del pastel, 1/12 de éste puede significar diferentes cantidades de pastel. Los ángulos son completamente independientes de tales áreas o espacios dimensionados[7].

Después de tener una discusión inicial sobre ángulos y medidas de ángulos, y refuerzar con práctica consistente, entonces deben examinarse los ángulos en relación a dos líneas rectas que intersecan. Dos líneas rectas que intersecan formarán cuatro ángulos, esto es, dos pares idénticos. Se llaman ángulos verticales. Dos distintos de estos ángulos forman un ángulo llano (180°). Se llaman ángulos suplementarios. El punto donde intersecan ambas líneas es el vértice para los cuatro ángulos. Los rayos[8] que forman los lados de un ángulo se llaman *lados angulares*.

La pregunta ahora puede plantearse respecto a los ángulos entre dos líneas paralelas. Como respuesta, se puede permitir que las líneas paralelas surjan a partir de un proceso donde el vértice se mueve hacia el infinito (ver Fig.8a-c). Durante este proceso, los lados angulares se mueven más y más en la misma dirección. También se puede señalar que las líneas paralelas siempre tienen la misma dirección. Si uno mira desde una línea paralela en su dirección, y luego hace lo mismo para la otra línea paralela, no habrá habido cambio de dirección, esto es, no ha habido rotación. Por lo tanto, el ángulo entre dos líneas paralelas es cero.



a *b* *c*

Fig. 8 a-c. ¿Qué ángulos cierran las líneas paralelas?

Consideraciones comparativas de la forma

Del círculo al triángulo

Podemos transitar del círculo al triángulo de manera similar a como lo hicimos con la elipse. Con esto en mente, dirigimos a un alumno nuevamente para que camine un círculo que gradualmente lleve a un óvalo con tres vértices y finalmente a un triángulo.

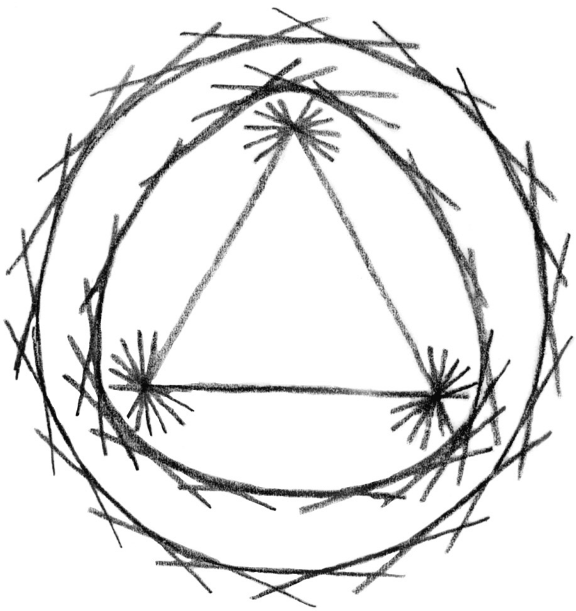


Fig. 9. Del círculo al triángulo

Podemos hablar de nuevo del ritmo de rotación y el caminar recto. Estos dos movimientos se *separan* en el caso del triángulo. En los lados del triángulo, nos *movemos* solamente *recto*. Y en las esquinas solamente *rotamos*. Nuevamente, esto puede ilustrarse muy bellamente con color (ver en el CD Rom).

Una amplia variedad de dibujos elementales a mano alzada puede realizarse como geometría del triángulo equilátero. Indicados aquí se encuentran posibles ejercicios que el maestro puede comenzar en el pizarrón, y que los niños pueden continuar de manera independiente.

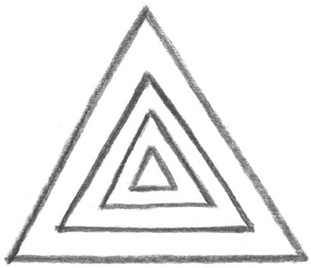


Fig. 10

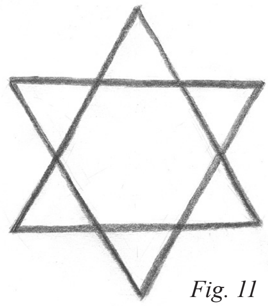


Fig. 11

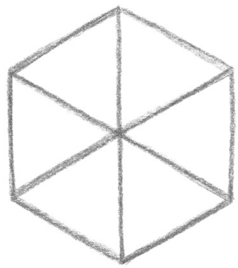


Fig. 12

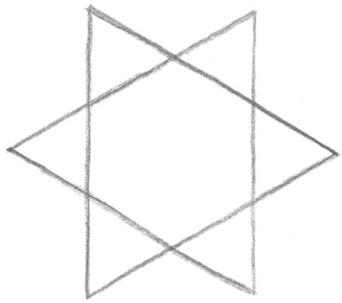
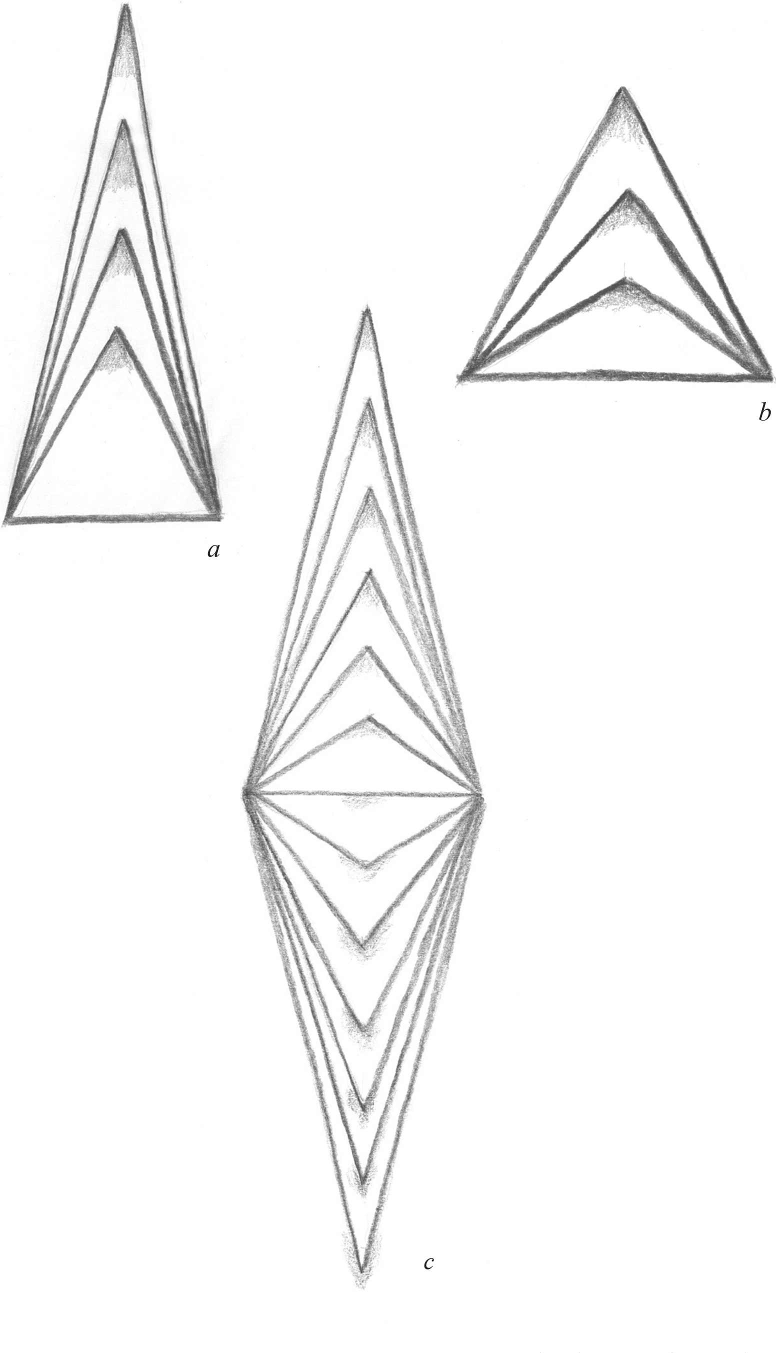


Fig. 13

Figs. 10-13. Ejercicios usando el triángulo equilátero

Ejercicios del triángulo

1. Triángulos crecientes y decrecientes (Fig. 10)
2. Dos triángulos sobrepuestos que forman una estrella de seis picos (Fig. 11)
3. Seis triángulos equiláteros dispuestos en torno a un punto para formar un hexágono (Fig. 12).
4. Los triángulos del hexágono abiertos hacia el exterior para que se forme una estrella de seis picos (Fig. 13).
5. El triángulo equilátero se estira (Fig. 14a), encoje (Fig. 14b), y oscila arriba y abajo (Fig. 14c).
6. El triángulo se voltea curiosamente sobre su costado (Fig. 15a) y oscila a ambos lados (Fig. 15b).
7. Un triángulo con un ángulo recto migra su vértice de un lado al otro, pero siempre mantiene su ángulo recto (Fig. 16).



a

b

c

Fig. 14 a-c. Ejercicios usando el triángulo equilátero

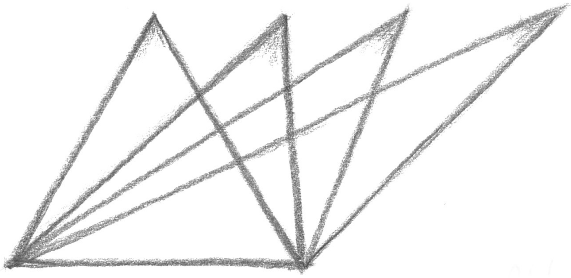


Fig. 15a

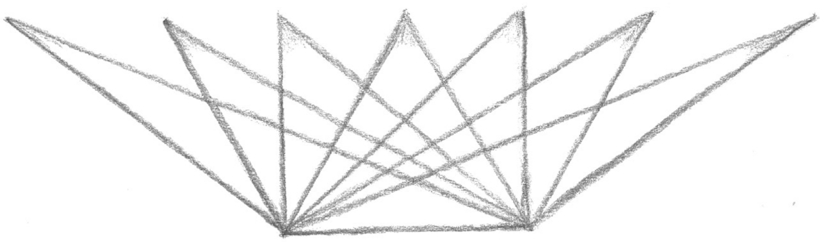


Fig. 15b

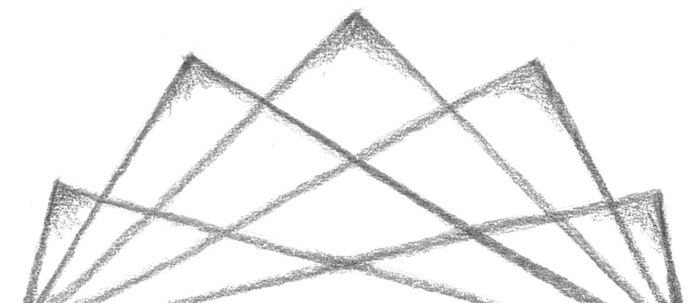


Fig. 16

Figs. 15 a-b, 16. Ejercicios usando el triángulo equilátero

Lecciones acerca del cuadrángulo

Así como con el triángulo, puede llegarse al cuadrado comenzando por un círculo y gradualmente convirtiendo el movimiento. Y, así como el triángulo se transforma inicialmente, podemos estudiar la transformación del cuadrángulo. Una vez más, se discute cómo uno se *desplaza recto* en los lados y *rota* para definir los ángulos.

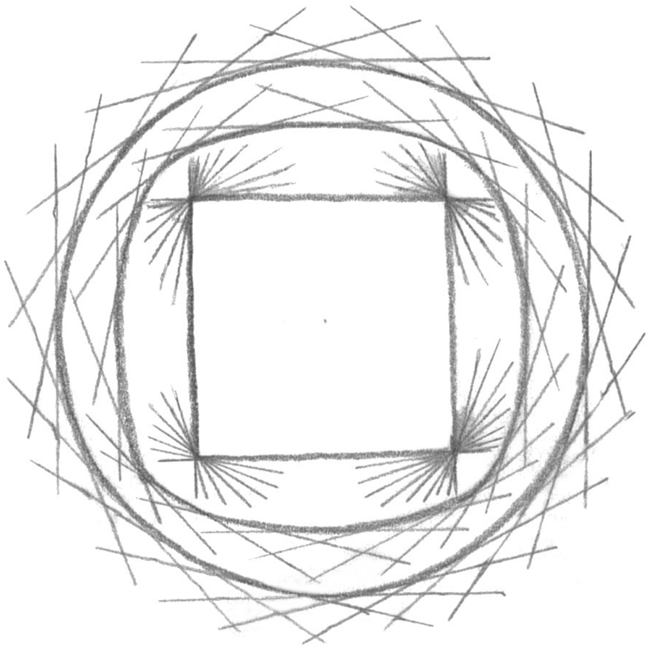


Fig. 17. Del círculo al cuadrado

Para adquirir términos descriptivos para las formas cuadrangulares, comencemos por la simetría del cuadrado. De esta manera, un arreglo de las formas cuadrangulares más importantes puede desarrollarse descriptivamente.

La casa de los cuadrángulos

Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría. Dos pasan por las esquinas opuestas y se llaman *diagonales*. Los otros dos pasan por los lados opuestos y se llaman *líneas medias*.

Todos los ángulos interiores son iguales, así como los cuatro lados. Las líneas medias miden lo mismo y se cortan mutuamente por la mitad. Lo mismo ocurre con las diagonales. Ambos pares de ejes forman un ángulo de 90°.

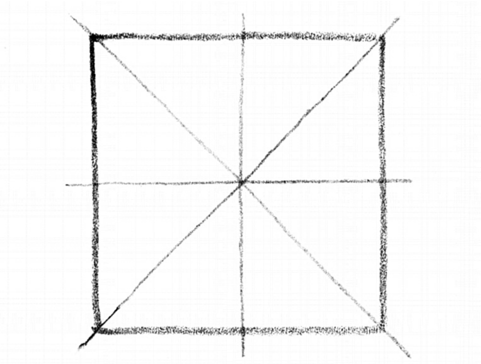


Fig. 18. El cuadrado y sus ejes de simetría

Ahora uno puede más expertamente o más imaginativamente (como se ha mostrado que es deseable en la investigación comparativa), comparar las variantes de cuadrángulos que son especialmente bien descritas por su simetría.

Por ejemplo, le cuento la siguiente historia a los niños, acompañada por los dibujos apropiados.

> El señor cuadrado, que es considerado el padre de la raza Cuadrangular, tenía dos hijos muy diferentes. Uno era muy concienzudo, pero terriblemente cuadrado y un poco rígido e inflexible. Su nombre era Rectángulo. Siempre quería complacer a todos. Es por eso que casi nunca hacía nada por iniciativa propia. Prefería sólo esperar a que alguien le dijera qué hacer. Así pues, se quedó simplemente como rectángulo por un largo tiempo.
>
> Su hermana era totalmente diferente. Ella quería ser flexible y elegante, pero como provenía de la familia Cuadrangular, algo angular y poco elegante seguía siendo

parte de su naturaleza. Su nombre era Rombo. A Rombo le parecía que siempre exhibir ángulos rectos era muy simple y muy rígido. Por ello sus ángulos a veces eran filosos y a veces suaves. Pero, por el gusto de una bella figura regular, ella siempre mantenía sus lados del mismo tamaño.

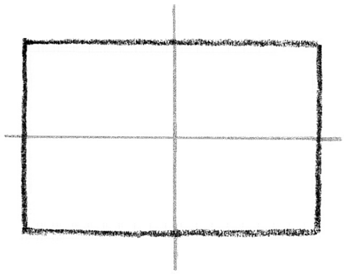


Fig. 19. El rectángulo

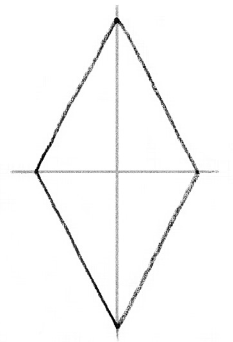


Fig. 20. El rombo

Los hermanos hacían muchas cosas juntos, pero, como suele ocurrir con los hermanos, se molestaban mutuamente también. Especialmente cuando uno notaba un error del otro, entonces ninguno era tímido para soltarlo. Un día, cuando Rectángulo estaba actuando como si fuera su padre, el Señor Cuadrado, Rombo se rio de él y dijo: "¿Quieres ser Papá? Padre tiene *cuatro* ejes de simetría y tú solo tienes *dos*. Tus diagonales ya no son ejes de simetría." Si saben algo acerca de hermanos, probablemente sepan que muy rara vez cederán ante el otro acerca de algo. Y este fue el caso. Después de este abuso, Rectángulo miró de cerca a Rombo y dijo: "Tú no eres algo mejor. Tú sólo tienes *diagonales* como ejes de simetría." Después de esto, ambos encontraron que se complementaban mutuamente bastante bien, y que juntos exhibían cualidades de su padre.

Un día, su primo *Paralelogramo*, vino de visita. Uno podía ver que estaban emparentados por las cuatro esquinas y cuatro lados de Paralelogramo, pero él no tenía rastros de ejes de simetría. A lo sumo, un eje podía irradiar desde el punto central o dar vuelta en torno al punto central 180°, una vez. Las otras cualidades de Paralelogramo no le parecían especialmente deseables a los dos hermanos.

Si veía a alguien más, él trataba de inmediato de hacer contacto y adaptarse al otro, lo cual incomodaba mucho a Rectángulo y a Rombo. Paralelogramo incluso parecía querer adaptarse a ellos: como Rectángulo, sus lados opuestos eran paralelos y de la misma longitud (de ahí venía su nombre); y, como Rombo, sus ángulos opuestos eran los mismo. Hasta ese punto, su adaptación parecía muy exitosa, pero desde el interior, los dos hermanos pensaban que había algo inadecuado con su primo: ni sus diagonales ni sus líneas medias formaban algún bello ángulo recto, ni podían encontrarse ángulos similares entre ellos. La única cosa que sí podía decirse era que sus diagonales y líneas medias se bisecaban mutuamente, y que pasaban por el mismo punto. De manera que, por lo menos, Paralelogramo tenía correcto el punto medio.

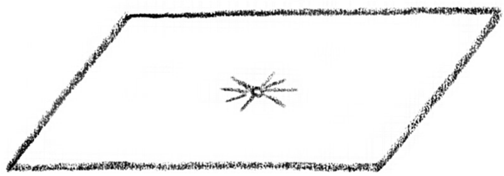


Fig. 21. El paralelogramo

Por cierto, Paralelogramo les mostró fotos de dos curiosos parientes. Eran cuadrángulos gemelos que se creaban al bisecar un paralelogramo. Ellos todavía tenían un par de lados opuestos, pero absolutamente ninguna simetría. Eran llamados Trapezoides (comunes). Nuestros dos orgullosos cuadrángulos, no querían admitir a estos Trapezoides en La Casa de los Cuadrángulos por su faltante simetría. Sólo cuando hubieron envejecido se volvieron menos orgullosos, pero esa es otra historia.

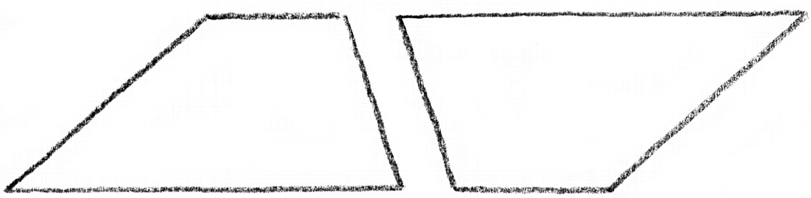


Fig. 22. Trapezoide común

Los dos hermanos eventualmente perdieron contacto el uno con el otro. Rectángulo pasaba mucho tiempo en su escritorio y así adquirió una figura adulta desparramada. Fue promovido a un *trapezoide de lados iguales*, pero esto no ayudó con su apariencia de ninguna manera. Desafortunadamente, Rombo se volvió algo alzada. Trataba de dar órdenes a otros en momentos muy inapropiados, y se convirtió en lo que llamamos arrogante. Su nuevo nombre, *Deltoide* o *Romboide*, sonaban rimbombantes, pero algunos simplemente la llamaban *Papalote*.

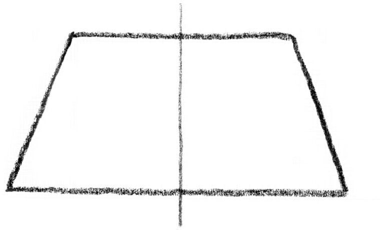


Fig. 23. Trapezoide de lados iguales

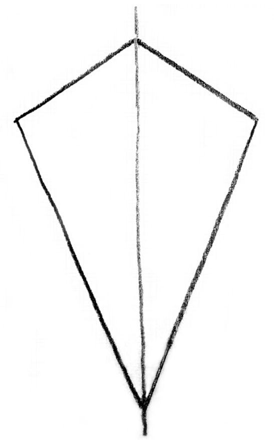


Fig. 24. Deltoide, romboide o papalote

Después de que muchos años habían pasado, los dos hermanos volvieron a verse en una reunión familiar. Con todo y lo mucho que se sentían unidos el uno al otro, los cambios que habían sufrido no pasaban desapercibidos a su observación crítica. “¿Qué ha pasado contigo?”, preguntó Deltoide. “Ya solo te queda un eje de simetría”. Trapezoide de lados iguales le aseguró a Deltoide: “Tu tampoco te has hecho más bella”. Verán, esta familia medía su belleza con base en la simetría. De manera que los hermanos decidieron nuevamente que eran aproximadamente iguales.

No hay mucho que contar acerca de los años posteriores. Se volvieron a ver una vez, cuando eran muy ancianos, y solamente se miraron en silencio porque sabían que el cuadrángulo común no tenía ninguna simetría, ni en su forma simple, ni en su forma sobrepuesta.

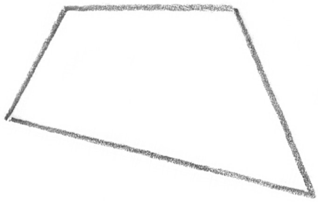


Fig. 25. El cuadrángulo común

Fig. 26. El cuadrángulo sobrepuesto

Uno puede contar esto a los niños como un preludio al trabajo en grados posteriores:

> Quiero contarles un secreto del que hablaremos más en el sexto grado: los cuadrángulos comunes, de manera invisible, se han mantenido como cuadrados. Tal vez puedan entender esto un poco si dibujo dos calles que se intersecan en ángulos rectos sobre una amplia superficie plana. En perspectiva, de lo cual hablaremos también en el sexto grado, un cuadrado (el plano donde intersecan las calles) tiene la apariencia de un cuadrángulo común y, sin embargo, pueden mirar a un cuadrángulo común como un cuadrado en perspectiva. Verán que las cualidades del padre se mantienen, de cierta manera, sólo que más escondidas. Aprenderán de las cosas más asombrosas acerca del cuadrángulo común cuando estén en los grados superiores, e incluso puede ser que encuentren que el cuadrado en perspectiva es más hermoso e interesante que el cuadrángulo común. A veces es así con el ser humano. La gente joven es la más bonita de mirar. Quien quiera que se haya vuelto viejo y haya trabajado mucho, no puede continuar viéndose tan bello en el exterior como una persona joven, pero en el interior, en su alma, puede ser que vivan grandes bellezas y grandes riquezas, ganadas a través de muchas experiencias que la vida ha traído hasta ellos.

Tales historias tal vez no son muy significativas en su contenido. Uno puede elegir entre diversas ilustraciones, a través de las cuales, los niños ganen una relación interna con las varias formas cuadrangulares.

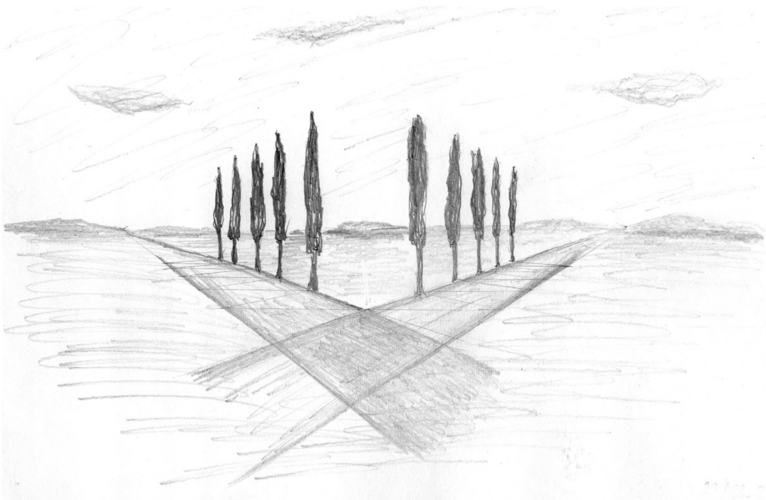


Fig. 27. Cada cuadrángulo común, es un cuadrado en perspectiva

Lo más importante es no enseñar sólo definiciones, sino resaltar la conexión entre las diferentes formas de tal manera que algo característico pueda encontrarse en las formas y, al mismo tiempo, que la relación entre ellas se vuelva clara.

En resumen, uno puede ilustrar a la familia cuadrangular y sus relaciones. Puede llamarse *La Casa de los Cuadrángulo* (ver Fig. 28a-h).

Aún por ser explorado está el hecho de los otros parientes de esta familia, como los cuadriláteros cíclicos o los cuadriláteros tangenciales, que pertenecen a otra rama de la familia. Estos serán presentados en el séptimo y octavo grado.

Las características más importantes de los cuadrángulos

Las formas individuales pueden ser exploradas más ampliamente y sus atributos mayormente caracterizados, después de una rápida revisión inicial de la familia de cuadrángulos. Los maestros tendrán que decidir qué tan lejos quieren llegar. La siguiente tabla tiene una vista general de las características. Por el interés en la brevedad, cada cuadrángulo identificado por un nombre, no exhibe al mismo tiempo una mayor simetría. Un cuadrado es, de hecho, al mismo tiempo un rectángulo. De cualquier manera, aquí no debe tomarse al rectángulo como un cuadrado, y lo mismo aplica para los demás casos.

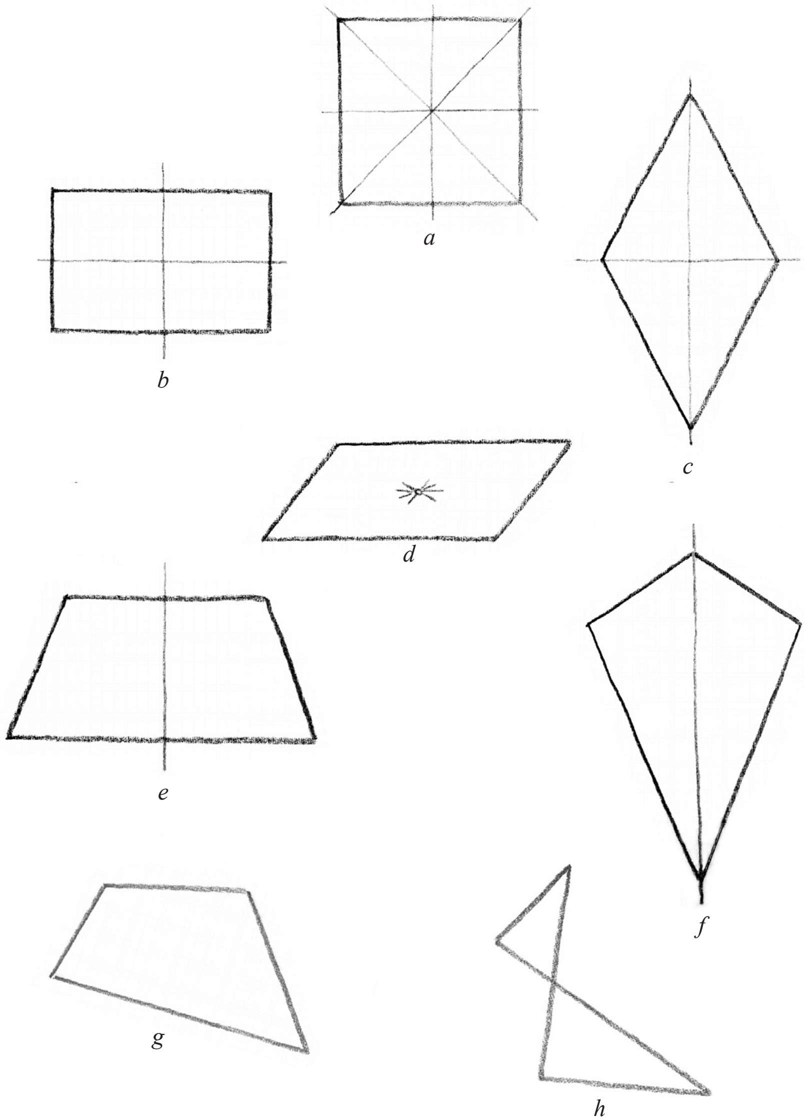


Fig. 28 a-h. La casa de los cuadrángulos

Al mismo tiempo que se tienen las conversaciones acerca de las diferentes formas de cuadrángulos, deberían realizarse ejercicios a mano alzada. Las siguientes son algunas sugerencias de ejercicios, que se ofrecen como acompañamiento a las respectivas formas conforme estas se discuten.

Ejercicios de cuadrángulos

1. Cuadrados concéntricos (Fig. 29)
2. Cuadrados crecientes con un punto fijo (Fig. 30)
3. Cuadrados anidados uno dentro de otro (Fig. 31)
4. Rectángulos dentro de un círculo (Fig. 32)
5. Del diámetro[9] horizontal al diámetro vertical. Rombos con el mismo eje de simetría y longitud de lados fija. De una línea horizontal a la vertical (Fig. 33).
6. Estrellas generadas por rombos con ápices comunes (Fig. 34a-b)
7. Paralelogramo con la misma base y altura. ¿Qué otras formas cuadrangulares pueden encontrarse en el dibujo?) (Fig. 35)
8. Estrella hecha de paralelogramos (Fig. 36)
9. Trapezoide isósceles dentro de un triángulo isósceles. El trapezoide dentro del triángulo se transforma (Fig. 37)
10. Trapezoide isósceles sobre cuerda circular[10] (Fig. 38)
11. Estrella deltoide (Fig. 39)
12. ¿Cuáles fracciones del mismo tamaño pueden producirse a partir de los mismos cuadrángulos? Encuentren tantos ejemplos como sea posible.

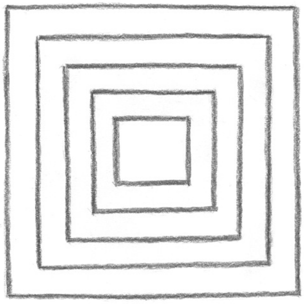


Fig. 29

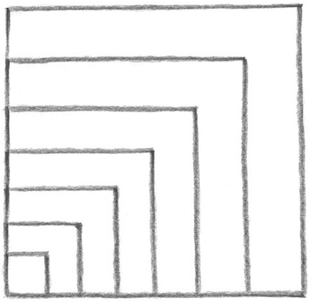


Fig. 30

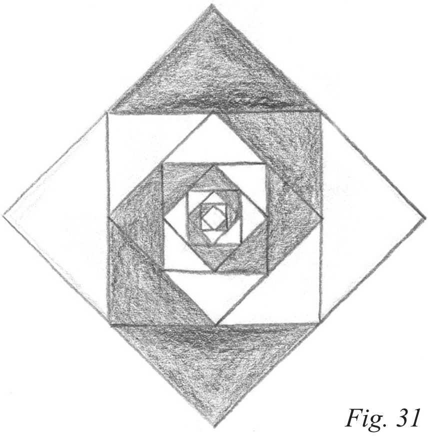


Fig. 31

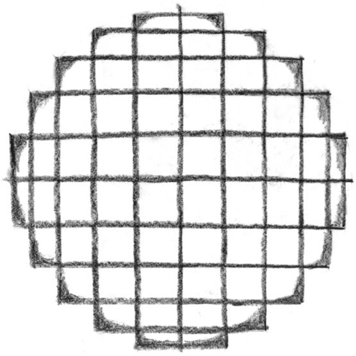


Fig. 32

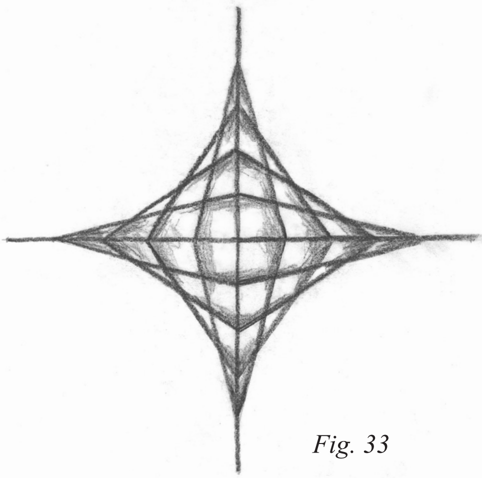


Fig. 33

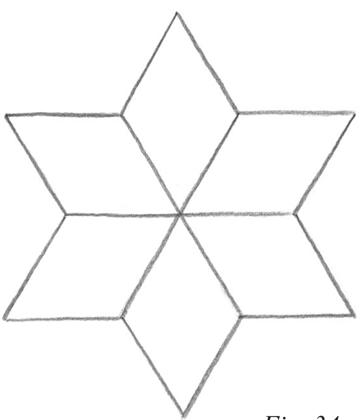


Fig. 34a

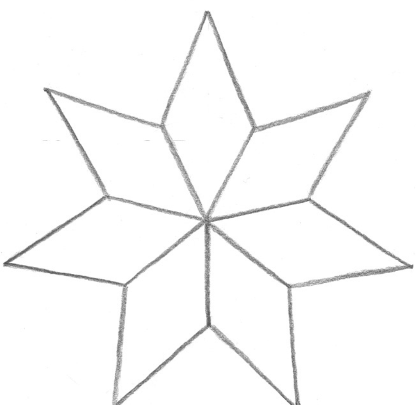


Fig. 34b

Tabla

Nombre	Ejes de simetría	Simetría de rotación	Ángulo entre diagonales	Ángulo entre líneas centrales	Relación de diagonales	Relación de líneas centrales	Ángulo interior	Lados	Círculo inscrito	Círculo circunscrito
Cuadrángulo / Cuadrado	4	90	90	90	Bisección mutua	Bisección mutua	4 iguales de 90	4 iguales	Si	Si
Rectángulo	2	180	Cualquiera	90	Bisección	Bisección mutua	90	2 pares opuestos iguales	No	Si
Rombo	2	180	90	Cualquiera	Bisección	Bisección mutua	2 pares de ángulos opuestos iguales	4 iguales	Si	No
Paralelogramo	0	180	Cualquiera	Cualquiera	Bisección	Bisección mutua	Ángulos opuestos iguales	2 pares opuestos iguales	No	No
Trapezoide Isósceles	1	-	Cualquiera	90	Dividido en radios iguales pero variados	Mutua	2 pares de ángulos adyacentes iguales	1 par opuestos iguales	No	Si
Deltoide	1	-	90	Cualquiera	Un ángulo bisecado, otro divido	Igual con cualquier radio	1 par de ángulos opuestos iguales	2 pares adyacentes iguales	Si	No
Cuadrilátero común	0	-	Cualquiera	Cualquiera	Cualquiera	Cualquiera	Cualquiera	Cualquiera	No	No

Fig. 35

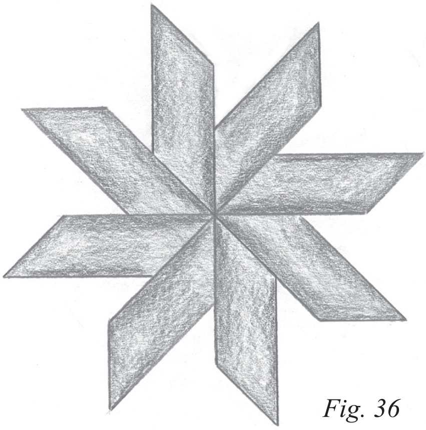


Fig. 36

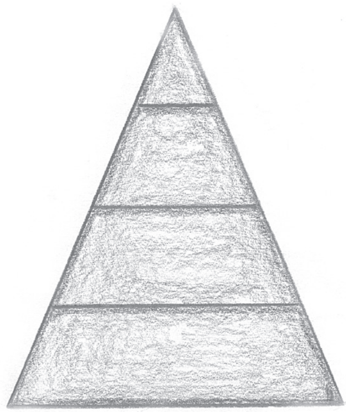


Fig. 37

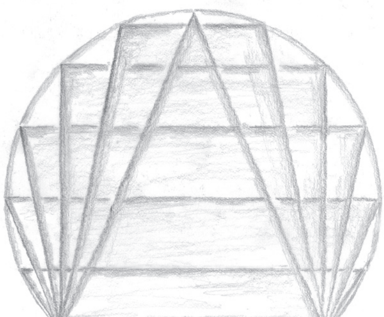


Fig. 38

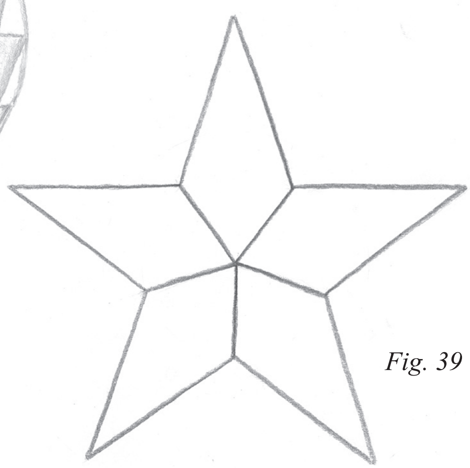


Fig. 39

Luz y sombra alrededor de la esfera

Después de que han cruzado la etapa de desarrollo que ocurre alrededor de los diez años, los niños son suficientemente maduros para lidiar con conceptos espaciales de una manera más internamenteconsciente de lo que antes había sido posible. A pesar de que la presentación de relaciones espaciales a través del dibujo en perspectiva se realiza hasta el sexto grado, y la geometría constructiva es material del noveno grado y más arriba, es aconsejable discutir formas espaciales una y otra vez.

La contemplación de las sombras de una esfera pueden ser un ejemplo especialmente bello. Por decir algo, en un salón que recibe el sol matutino, se puede tener una pelota de poliestireno, como las que pueden comprarse en las tiendas de manualidades, lista y en espera de un día soleado. Recomiendo clavar una tachuela plana en la pelota, a la cual se sujeta un hilo largo, y desplegando una cartulina blanca grande. Si el sol está brillando y la lección regular lo permite, entonces una observación de la sombra de la esfera puede incorporarse.

La pelota se sostiene ante el sol por el hilo, y la relación entre luz y sombra se discute con los niños: el área de la pelota que mira hacia el sol es la más clara, y gradualmente se vuelve más oscura, hasta llegar al área de espaldas al sol, que es sombra. La pelota "responde" al sol con su brillo en el lado que mira hacia él.

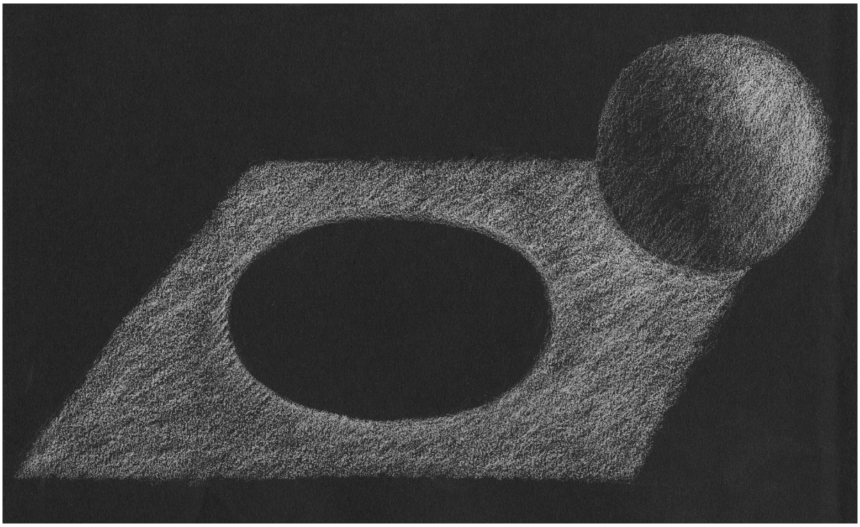
Cuando la pelota se ha observado y discutido suficiente, entonces la cartulina blanca se sujeta perpendicular al sol, detrás de la pelota. Así como la pelota tiene un contorno redondo cuando se le mira por todos lados, también la sombra es circular. Si la sombra se gira un poco, fuera de la dirección de la luz, entonces la sombra comienza a elongarse. Se vuelve elíptica. Ahora puede jugarse con la cartulina en varias posicione. Si se dobla de forma cilíndrica, entonces la sombra pierde su forma elíptica, y adopta otras variadas formas ovaladas o similares a gotas. Sin embargo, en la discusión uno busca mantenerse por ahora en las formas circulares y elípticas de la sombra. ¿Cómo es que una pelota que es redonda en todos sus lados, arroja una sombra elíptica?

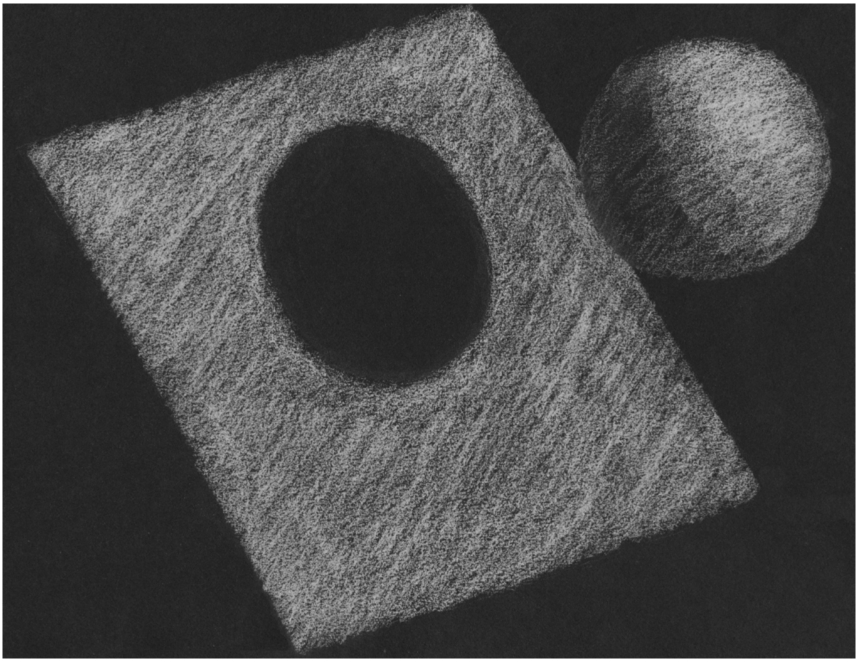
Por el momento, se puede traer a la conciencia el hecho de que en realidad uno *no puede* ver la luz. Solo cuando algo se presenta ante la luz es que podemos ver, sobre ese objeto, la luminosidad que se le efectúa. Pero tampoco vemos el área de sombra detrás de la pelota. Luz y sombra sólo aparecen cuando la cartulina es colocada.

Ahora podemos hablar del *área de luz* y el *área de sombra*. El sol crea el área de luz, y la pelota crea el área de sombra. Podemos determinar qué forma tiene el área de sombra al mover la cartulina detrás de la pelota, hacia adelante y hacia atrás. El área de sombra es invisible, pero puede hacerse visible colocando la cartulina más cerca o lejos de la pelota. Incluso cuando no es discernible, se puede describir su forma: es cilíndrica como un poste curvado, o como una salchicha recta. La sombra aparece donde la cartulina *corta* el área de sombra. Si ésta se corta verticalmente respecto a su propia alineación, entonces, como ocurriría con una salchicha cortada en forma recta, se crea una superficie circular. Si es cortada con algún sesgo, ocurrirán formas elípticas.

La sombra ocurre donde las áreas de luz y sombra se cortan desde superficies materiales. En el caso más simple, la forma de la sombra depende de la forma y posición del objeto sombreado, pero también, en gran medida, de la posición y forma de la superficie sobre la cual es causada la sombra. En la realidad, la forma del cuerpo que brinda la luz (entre otras cosas), también juega un rol, sin embargo, este asunto puede dejarse para más adelante.

La perspectiva espacial de los niños es extraordinariamente estimulada cuando se conduce esta observación u otras similares, de una manera muy elemental. Lo importante es no hablar de modelos abstractos como los rayos de luz y otros por el estilo, sino atender *los contenidos de espacio formados*, sus *límites* y las *formas de sus cortes.* Para el dibujo del pizarrón, no debería haber líneas sino superficies coloreadas con gis.





Figs. 40 y 41. La sombra de la pelota en varias superficies

El Quinto Grado

La geometría del quinto grado es similar a la del cuarto grado, en cuanto a que sigue siendo geometría a mano alzada, visto como una extensión del dibujo de formas. Las descripciones de construcción sugeridas aquí, pertenecen, en sentido estrecho, a las lecciones matemáticas.

Los siguientes diseños geométricos concernientes a la simetría, deben ser comprendidos, al menos en parte, como discusiones de acompañamiento para los ejercicios a mano alzada. El tiempo de actividad en la clase principal puede comenzar con la consideración del círculo y la simetría. Luego pueden comenzar los ejercicios diarios a mano alzada, para los que se ofrecen algunas sugerencias. De cualquier forma, por el momento, el círculo debería dibujarse y discutirse de una nueva manera.

El círculo

Se puede comenzar con el círculo justo como se hizo en el cuarto grado. Sin embargo, esta vez debe ocurrir desde un proceso. Imaginamos un brote desde el que permitimos, por ejemplo, con color amarillo, que surja una pequeña área circular. En un segundo dibujo permitimos que, en torno a éste, por ejemplo, en azul, también surja una forma circular que envuelve a la primera. Ahora los niños deben alternar entre amarillo y azul con el dibujo, de manera que el área amarilla esté *llenando* una forma circular, creciendo hacia afuera, mientras que el área azul, *envuelve* desde afuera, restringiéndose al medio, encerrando una forma circular.

Dejemos a los niños experimentar la sensación polar, asociada con estar en el centro o en la periferia, ejemplificado cuando extendemos nuestra conciencia hacia afuera, hacia el entorno.

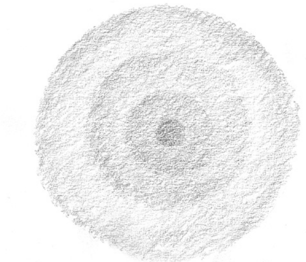


Fig. 42. Area circular expandiéndose
El círculo interno llena la forma

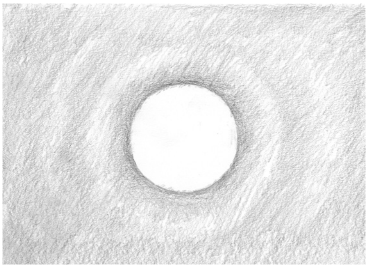


Fig. 43 Área circular encerrándose
El círculo exterior envuelve la forma

En un tercer dibujo, dejamos que ambos procesos ocurran al mismo tiempo. Con amarillo, los niños dejan surgir un área circular creciente, y con azul, desde el perímetro, un manto o cubierta para el círculo. Una línea circular aparece donde los dos procesos se encuentran.

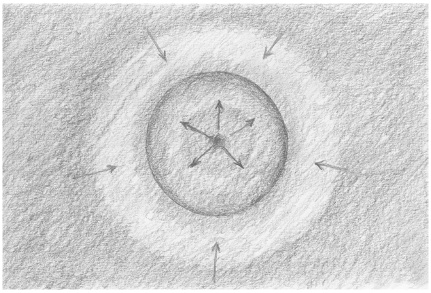


Fig. 44. Círculo interno y externo se encuentran en la línea circular

Uno puede pensar en corrientes de agua fluyendo una contra la otra, así como ocurre en una tormenta en la costa. La *línea de surf* aparece por el choque entre el agua que viene y el agua que se va. Así es como este círculo está permeado por percepciones dinámicas. Surge a partir de un *proceso dinámico*, como la línea de surf entre dos *corrientes*. No posee un estado de ser, de la manera que lo tiene un área. Su estado de ser está constituido por un *proceso*.

Los dos movimientos pueden ser explorados también a través de dos dibujos monocromáticos. El amarillo puede expandirse y contraerse, fluir afuera y concentrarse. Los gestos del movimiento son *distenderse* y *compactarse*. La cubierta azul puede envolver más apretadamente, o expandirse. Los gestos del movimiento son *envolver y dilatarse*.[11]

Las líneas rectas y los puntos como determinantes de los límites de un círculo

En el cuarto grado, permitimos que varias formas (elipse, triángulo, cuadrado) brotaran de un círculo. En ese momento, señalamos dos clases de movimiento (desplazamiento recto = cambio de lugar, y rotación=cambio de dirección). Las líneas circulares aparecieron como puntos y como una colección de rayos.[12]

Podemos retomar esto en el quinto grado. Llamamos la atención hacia el hecho de que el circulo tiene muchos *lugares* (= puntos) por los cuales caminar, así como *direcciones* que están indicadas por las líneas que envuelven el círculo como *tangentes* (ver Fig. 45). Podemos reiterar los contenidos de la lección del cuarto grado, pidiendo a un niño caminar la forma del círculo, y presentar el movimiento completo como un dibujo en el pizarrón. Después de que esto se ha completado, entonces pedimos al niño caminar el círculo, haciéndolo cada vez más pequeño, encogiéndose hasta el punto de que el único movimiento posible sea rotar en un solo lugar. Un *lápiz de líneas* se ha creado. Éste consiste en un punto y todas las líneas que pasan por él. Las líneas pueden rotar sobre este punto en dos direcciones: horaria y antihoraria (ver Fig. 46).

Ahora dejemos que el círculo crezca nuevamente. Puede decirse que el haz de líneas irradia hacia afuera. Conforme el círculo se hace más y más grande, caminar recto se vuelve más aparente y la rotación se vuleve menor. Finalmente, el círculo se hace tan grande que no puede seguir caminándose en el salón, o ser dibujado en el pizarrón. Sin embargo, podemos desarrollar el alargamiento del círculo en la

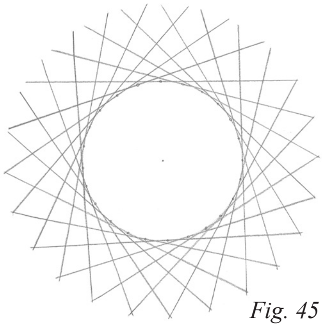


Fig. 45

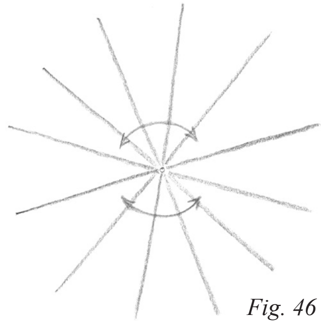


Fig. 46

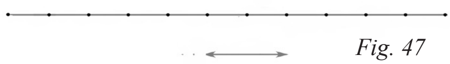


Fig. 47

Figs. 45-47. Un círculocon sus tangentes puede degenerar en un haz de rectas o en una hilera de puntos

imaginación de los niños, y proponer que el círculo crezca hasta el infinito. De los dos movimientos, sólo queda caminar recto en la única línea restante (ver Fig. 47). Una línea con sus puntos se llama *hilera de puntos*.[13] Tanto como sea posible, uno debe discutir con los niños los dos casos extremos del círculo (el haz de rectas s y la hilera de puntos), como polaridades. Si debiera relacionarse la parte interna y externa del círculo de la manera más simple, entonces uno puede pensar que cada punto parece ser infinito. Es por eso que tuvimos el área circular amarilla expandiéndose desde el punto interno del origen. Cada línea es infinita en sí misma. Las líneas pueden *envolver* una forma circular como un manto, alrededor de lo que los puntos han formado al *rellenar.* La totalidad de líneas afuera de un círculo en matemáticas se llama envolvente (*hull* en inglés, ver Fig. 48). La parte interna formada por los puntos se llama núcleo (*kernel* en inglés, ver Fig. 49). Usualmente se describe como un área circular.

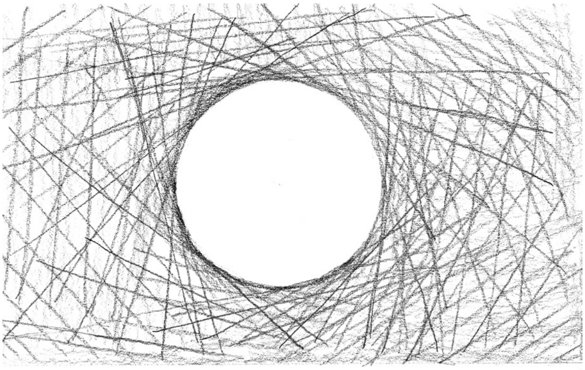


Fig. 48. Envolvente del círculo – exterior

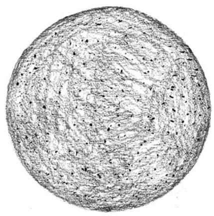


Fig. 49. Núcleo del círculo – interior

Puntos y líneas rectas en relación con el círculo

Podemos llevar la atención de los niños a la relación *polar* de los puntos y las líneas rectas respecto al círculo, basados en las consideraciones anteriores. La palabra polar demuestra que algo opuesto, pero aún orientado hacia el otro, está actuando, así como puede ser observado con el simple caso de los polos norte y sur en un imán. Uno puede contarle a los niños que seguirán explorando estas relaciones polares aún más, en los grados superiores (10° y 11°) en mucho más detalle.

Un punto especial en un círculo es el *punto central*. Las líneas que pasan por el punto central se llaman *líneas centrales*. Éstas cortan el círculo en puntos opuestos. El segmento (lineal) entre tales puntos opuestos se llama el *diámetro* de un círculo. Medio diámetro, la distancia del punto central a un punto del círculo, se llama *radio*.

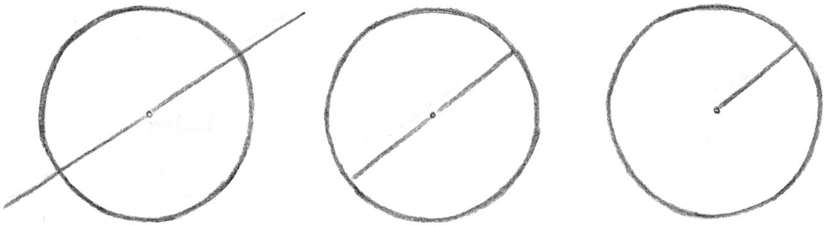


Fig. 50 a-c. Línea central, diámetro, radio

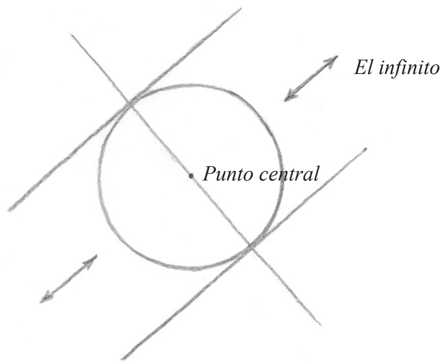


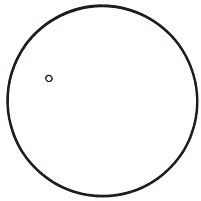
Fig. 51. La relación del punto central con el infinito

Si uno observa la línea central y las tangentes en sus puntos de intersección con el círculo, entonces estas tangentes son *paralelas*. Apuntan al infinito. Así, el punto central en el interior del círculo tiene una relación con el infinito, a partir de la cual surge la envolvente que dibujamos de azul al principio, y que después se expande hacia el medio. El punto central de un círculo con todas sus líneas centrales es el equivalente infinito en todas direcciones.[14]

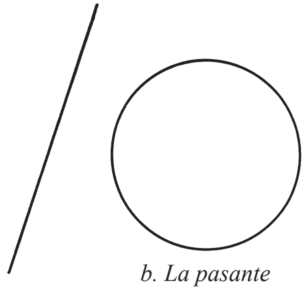
Ahora, cuando una línea recta gradualmente se aproxima a la línea de un círculo desde el infinito, podemos describir varias locaciones en relación al círculo. Mientras una línea recta no toque o encuentre circulo, se le llama *pasante*. Si toca el círculo en un punto, entonces se vuelve *tangente*. Si corta el círculo en dos puntos, es una *secante*. Si pasa por el punto central entonces, como ya hemos dicho, es una *línea central*. La relación de las líneas rectas con un círculo, es esencialmente determinada por el número de puntos del círculo. Aquí, la *cuerda* también debe ser definida: es el segmento de una secante determinado por los puntos de intersección.

Ahora, uno puede diferenciar puntos de acuerdo a cuántas líneas rectas tienen en común con el círculo (ver Fig. 52a-h). Los siguientes términos, excepto punto límite, no son comunes, pero sí corresponden exactamente a la distinción entre diferentes locaciones de líneas rectas. Un punto en el interior de un círculo no tiene tangentes en común con el círculo. Corresponde a *la pasante*, que no tiene puntos en común con el círculo. Podría llamarse *punto de evasión*. Ahora, si el punto avanza hacia afuera, hasta ubicarse en la línea del círculo, tiene una línea en común con el círculo, una tangente. Se le llama *punto límite*. La secante con sus dos puntos del círculo, corresponde a un punto fuera del círculo que ahora tiene dos líneas rectas (*tangentes*) en común con el círculo. Podría llamarse *punto de conexión*. Las líneas centrales corresponderían a un punto que está infinitamente lejos, y que envía dos tangentes encontradas hacia el círculo, así como las líneas centrales tienen dos puntos paralelos del círculo. Podría llamarse *punto de desvanecimiento*.

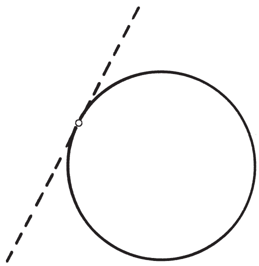
No considero necesario el introducir todos estos términos. Sin embargo, uno debería centrar la atención hacia el hecho de la relación polar entre las líneas rectas y los puntos del círculo.



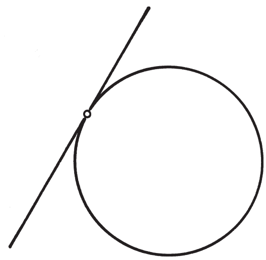
a. Punto de evasión



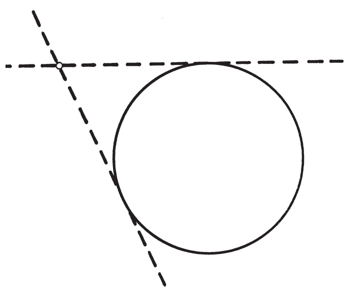
b. La pasante



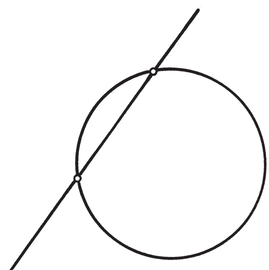
c. Punto límite



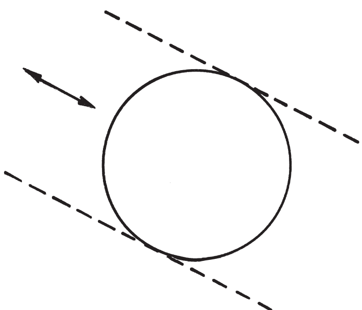
d. Tangentes



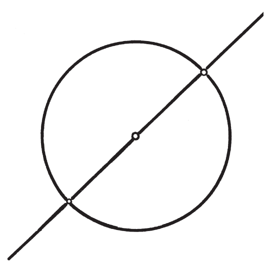
e. Punto de conexión



f. La secante



g. Punto de desvanecimiento



h. Línea central

Fig. 52 a-h. Puntos y líneas rectas en relación al círculo

Simetría del círculo

Los niños se han familiarizado por largo tiempo con los ejes de simetría, a partir de una gran variedad de ejercicios en dibujo de formas. Considerando lo significante que es entender la simetría para desarrollar la geometría, aquí uno puede hacer notar especialmente las relaciones de simetría del círculo y las figuras simples conectadas con ello, teniendo cuidado de no llegar a formalidades sistemáticas muy pronto. Junto con esto, el maestro puede un día discutir la simetría (axial) y quizás en ese momento especificar una de las figuras simples con simetría axial. Por ejemplo, durante la discusión sobre el cuadrángulo, los ejes de simetría pertenecientes a la Casa de los Cuadrángulos aparecieron en la discusión. Una u otra de estas figuras puede ser recordada.

Después, uno podría preguntarle a los niños acerca de los ejes de simetría en el círculo. El resultado probablemente sea encontrado muy rápidamente: todas las líneas centrales (y solamente esas) son ejes de simetría (ver Fig. 53).

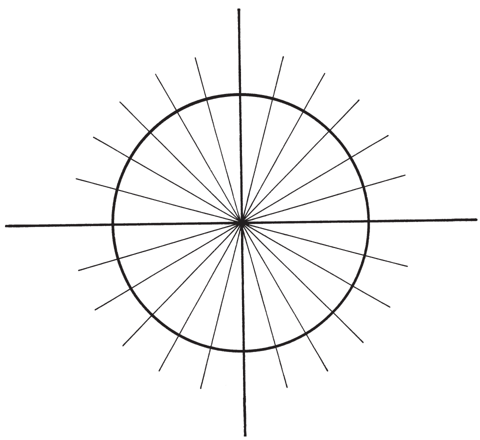


Fig. 53. Todas las líneas centrales (y ninguna otra línea recta) son ejes de simetría del círculo

Ahora, hagamos emerger un segundo círculo a partir del primero, del mismo tamaño, pero con su punto central desplazado (ver Fig. 54a). Esta nueva figura que consiste de dos círculos, tiene solo *dos* ejes de simetría. La línea que conecta los puntos centrales de ambos círculos, y la línea que conecta los dos puntos de intersección de los círculos. Los dos ejes de simetría son perpendiculares entre ellos.

Ahora, si los centros de los círculos se separan aún más, llegamos al caso en que los dos círculos entran en *contacto* (ver Fig. 54b). Un eje de simetría sería entonces la tangente común. Si los puntos se separan aún más, entonces este eje va perpendicular a la línea que conecta los centros de los círculos, a medio camino entre los dos centros (ver Fig. 54c).

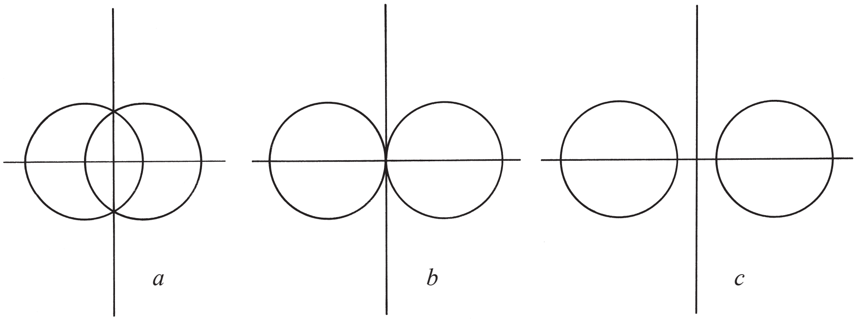


Fig. 54 a-c. Los ejes de simetría de dos círculos con el mismo radio

Ahora podemos variar la figura de otra manera, permitiendo que los círculos se hagan más y más pequeños (ver Fig. 55a-c), hasta el momento en que se encojan al tamaño de un punto. Incluso la simple figura hecha de dos puntos tiene dos ejes de simetría (ver Fig. 55c).

En la siguiente variación, dejamos que los círculos se hagan más y más grandes hasta el momento en que se conviertan en líneas (ver Fig. 55d-e)[15]. Si son paralelas (ver Fig. 55e), entonces el interesante caso aparece en que pueden encontrarse muchos ejes de simetría, de hecho, todas las líneas rectas que son paralelas a la línea original que conecta los puntos centrales, se han vuelto ejes de simetría. El segundo eje de simetría original se ha vuelto una paralela media. Sin embargo, si las dos líneas rectas se intersecan mutuamente, entonces sólo hay dos ejes de simetría (ver Fig. 55f).

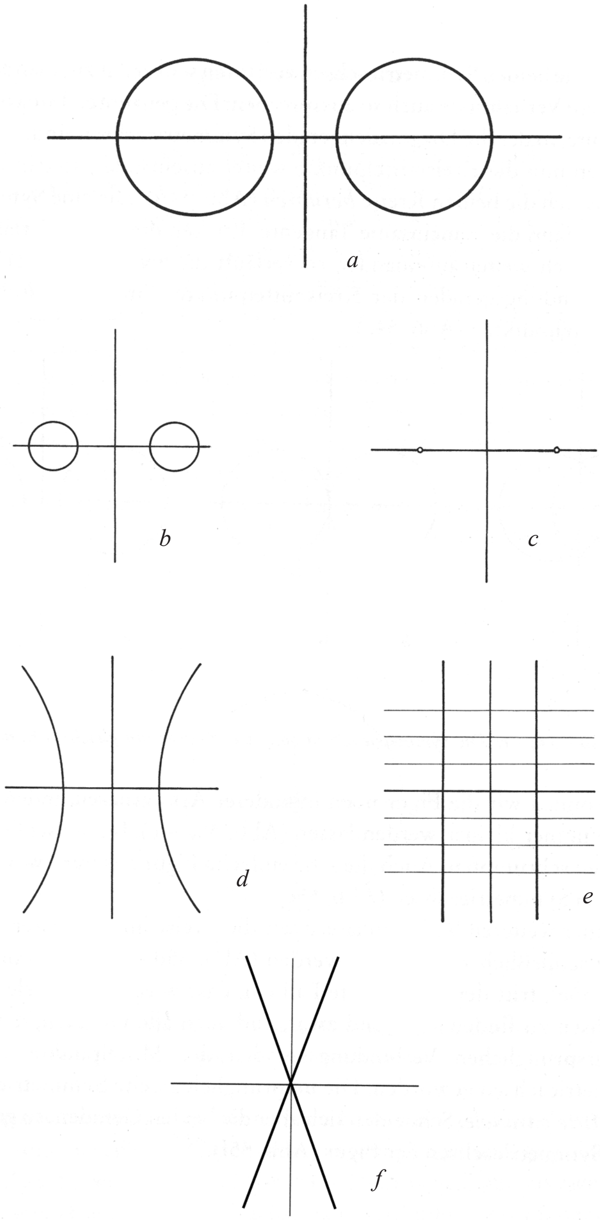


Fig. 55 a-f. La simetría de dos círculos más los casos limítrofes

La metamorfosis de la figura puede progresar de manera interesante si ahora variamos el radio del círculo (ver Figs. 56b-c y 56d-e). Entonces la línea que conecta los puntos centrales se vuelve el único eje de simetría.

Una vez más, podemos variar la figura al extremo en que sólo aparecen puntos y líneas (ver Fig. 56f). Cuando los puntos no se hallan sobre la línea recta, entonces la figura hecha por un punto y una línea a tiene exactamente un eje de simetría. El caso de un círculo y una de sus líneas intersecantes (una secante) también debería ser especialmente mencionado. El eje de simetría va perpendicular a la cuerda asociada, y la biseca (ver Fig. 56g).

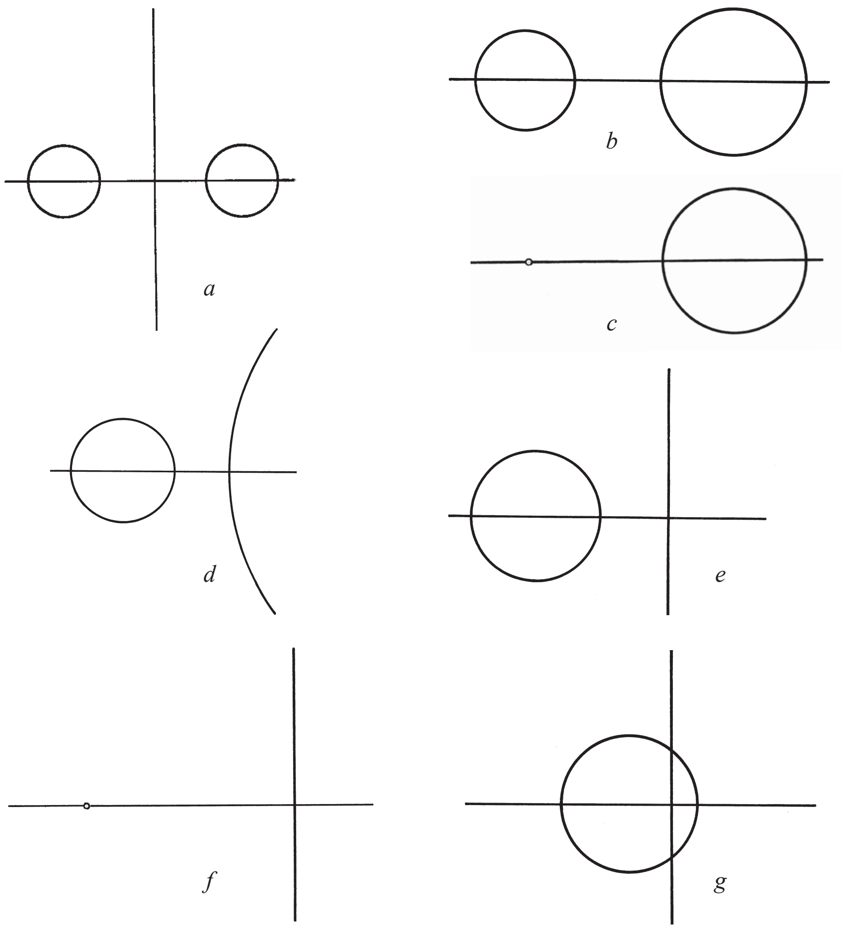


Fig. 56 a-g. Simetría de dos círculos con radios variables y casos extremos

Ejercicios de geometría a mano alzada

La discusión que ha ocurrido en torno al círculo, debe ser acompañada por dibujos de geometría a mano alzada. Algunos de estos ejercicios quizás se han hecho en años pasado. Sin embargo, siempre pueden ser puestos en una nueva luz y mostrar, con su creciente perfección, algo del progreso hecho por los niños. Adicionalmente, estos ejercicios pueden ser construidos cuando se presenten el compás y la regla. A través de esto, las habilidades de la mano, así como la precisión de los instrumentos se muestra con recíproca iluminación.

1. Un círculo (Fig. 57)
2. Círculos concéntricos formados del interior al exterior ((Fig. 58)
3. Ejercicio germinal (Fig. 59)
4. Balance entre punto y línea por un grupo de círculos (Fig. 60)
5. Triángulos en un círculo (para practicar percepciones flexibles y descripciones comparativas) (Fig. 61a-b)
6. Roseta circular (Fig. 62)
7. Estrella de cinco puntas en el pentágono (Fig. 63)
8. Cuadrados anidados juntos (Fig. 64)

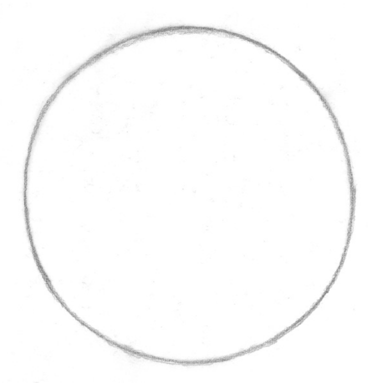


Fig. 57

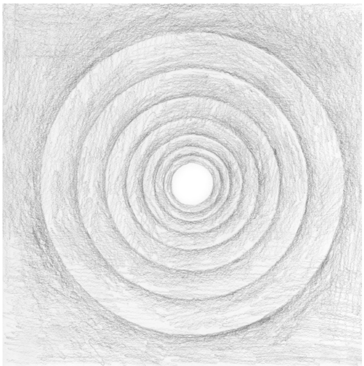


Fig. 58

Figs. 57 y 58. Ejercicios de geometría a mano alzada

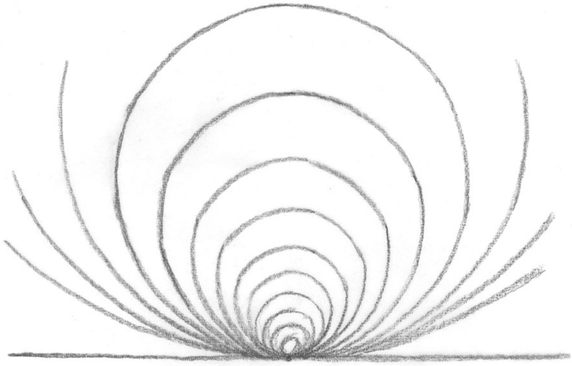


Fig. 59

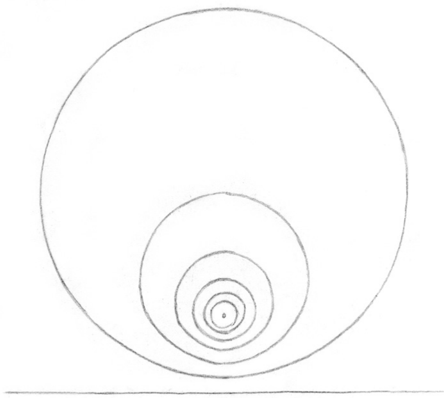


Fig. 60

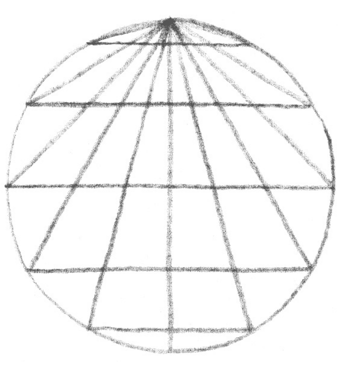


Fig. 61 a

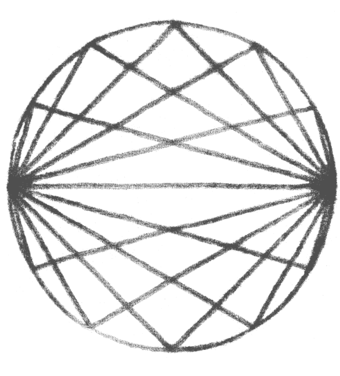


Fig. 61 b

Figs. 59, 60 y 61 a-b. Ejercicios de geometría a mano alzada

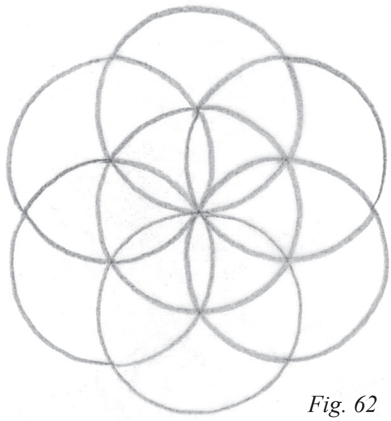


Fig. 62

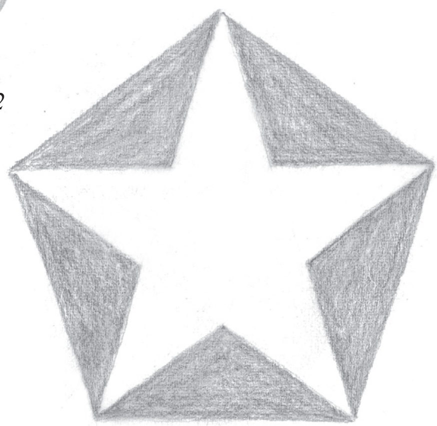


Fig. 63

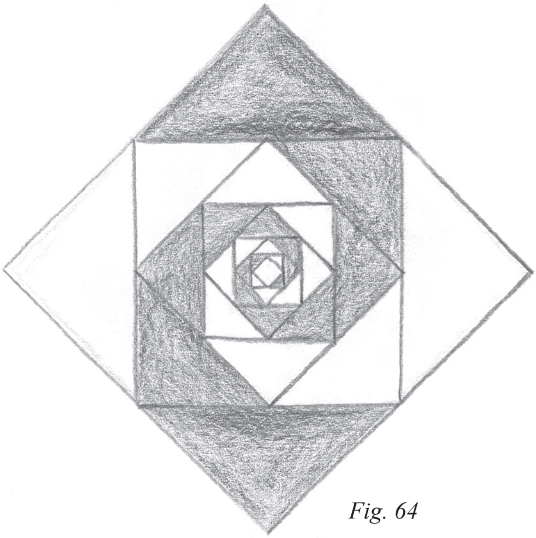


Fig. 64

Figs. 62-64. Ejercicios de geometría a mano alzada

Introducción al compás y a la regla

La introducción al compás y a la regla no se trata sólo de herramientas que facilitan el hacer dibujos más exactos, sino que estas herramientas en sí mismas son expresiones de ciertos conceptos y correlaciones de conceptos que conducen a tareas y preguntas totalmente nuevas. Por ejemplo, no tiene sentido que en la geometría a mano alzada se pregunte sobre la construcción del punto medio de un segmento. Si el centro o los lados están determinados, como en el caso de los cuadrados anidados, entonces ocurre una educación de los sentidos y la coordinación. En contraste, si un compás y regla están disponibles, entonces ciertas acciones están predeterminadas por las herramientas. Esas aplicaciones pueden ser conceptualmente descritas y reflexivamente justificadas. El desarrollo motriz a través del uso de instrumentos comienza a separarse a sí mismo del *contenido* matemático, como se hace aparente con el uso de un programa computacional de geometría, donde es notoria una separación extrema de la activad motora y el contenido presentado en el monitor.

Para preparar la introducción de instrumentos de geometría, es recomendable realizar una reunión previa con los padres donde se pregunte en qué casas hay disponibles compases y aparatos de dibujo apropiados. Estas herramientas deben ser etiquetadas con los nombres de los niños y traídas a la escuela, de manera que el maestro tenga tiempo suficiente para revisarlas y determinar si son adecuadas. Si se hace un pedido, recomiendo que sea un pedido combinado, llevado a cabo por el maestro. Como estándar, las patas de un compás deben estar bien conectadas, de manera que sólo se muevan juntas. Para dibujos más amplios, es provechoso adquirir un compás que pueda extenderse. Además, para estar bien equipado, se debería contar con una regla graduada de doce pulgadas, un juego de escuadras, lápiz, lápices de color, sacapuntas, y una pieza de papel lija fino para afilar el grafito del compás. Los bolígrafos no son adecuados para el dibujo geométrico porque derraman tinta sobre el papel. Hasta el comienzo de la geometría constructiva, cada niño deberá tener al menos un compás y una regla listos en las repisas o muebles de almacenamiento del salón. Además del cuaderno de hojas blancas, a mí me gusta tener hojas de papel grandes a la mano para los dibujos más amplios, que normalmente se guardarían en carpetas o portafolios.

Cuando llega el día de la primera lección de geometría constructiva, es recomendable tener los aparatos de dibujo a la mano, pero todavía no repartidos a los niños. Primero, el maestro debe demostrar todas las partes del compás, su uso y cómo se manipula. Uno llama la atención al hecho de que la punta del compás puede doblarse fácilmente si éste cae al suelo, lo cual puede sin duda arruinar el compás. Uno nombra ambas *patas* del compás y demuestra cómo la punta y el grafito son colocadas y retiradas, qué puede ocurrir si alguno de los tornillos de sujeción se pierde, cómo uno afila el grafito con el papel lija (en punta, no redondo) y, finalmente, cómo uno sujeta el compás para dibujar el círculo.

La pata del compás con la punta metálica se toma con la mano izquierda. La derecha toma el mango del compás (los niños zurdos hacen lo opuesto). La punta metálica se coloca donde el punto central del círculo deba estar,aprieta suavemente y libera (observar la foto en el CD Rom anexo). Sosteniéndolo por el mango, se gira en sentido de las agujas del reloj, de manera que el espacio entre las patas del compás sea tan perpendicular al papel como sea posible. Puede también tender ligeramente hacia adelante, en la dirección del movimiento. Esta descripción del manejo del compás puede ser mejor demostrada junto con un compás grande para pizarrón.

Hay poco que decir acerca de la regla. Mientras el maestro corre su dedo sobre el borde de dibujo, la suavidad debe ser descrita. El peligro es que, si la regla cae o es golpeada, entonces puede producirse una muesca que la haga inútil para el trabajo exacto. Una vez que los instrumentos se han repartido a los niños, ellos pueden examinar por sí mismos su calidad.

Esta amorosa y abarcante discusión acerca de los instrumentos, resulta en que los niños sean mucho más cuidadosos con ellos. Enseñar el valor de una buena herramienta, no puede enfatizarse lo suficiente.

Términos

Si, a partir de las lecciones, surge una necesidad de expresarse sucintamente acerca del dibujo, entonces los términos vértices (puntos), lados, líneas rectas y ángulos de las figuras, deben discutirse sistemáticamente. Puede hacerse de la manera tradicional, o quizás de forma algo distinta. Designamos puntos con letras latinas grandes, las líneas con letras latinas pequeñas, y los ángulos con letras griegas.

Estas designaciones aún actualmente se usan bastante, hasta en países que, por lo demás, no emplean la escritura griega o latina. Es por esto que, por ejemplo, no es tan difícil que alguien se oriente en un libro ruso de geometría.

En años próximos, los niños aprenderán a denotar líneas rectas al especificar dos puntos. AB. Donde AB es el segmento de línea que conecta los puntos A y B. $\overline{AB}$ es el modo matemático de designar el segmento linear entre los puntos A y B[16].

Ejercicios de línea recta y de círculo

Los niños deben familiarizarse con los recientemente introducidos instrumentos de dibujo, a través de una serie de ejercicios simples. Desde el principio, el maestro y los alumnos deben poner mucha atención en que el trabajo sea exacto. Los lápices, con grafito no muy suave, deben estar bien afilados. Si el punto medio de un círculo se halla sobre una línea recta o el borde de un círculo, entonces la precisión debe ser al menos de 1/16 de pulgada. Antes de que los dibujos comiencen, el punto central del círculo debe marcarse de manera que pueda encontrarse fácilmente. Esto es especialmente importante cuando se dibuja en el pizarrón. La roseta circular prontamente mostrará qué tan precisamente se está haciendo el trabajo. Una serie de sugerencias se da con los dibujos presentados aquí, la cual puede fácilmente expandirse.

Si los puntos sobre una línea recta serán marcados en intervalos consistentes, a menudo es más conveniente usar un compás con dos puntas (en lugar de grafito) ya que, al poner un punto, el siguiente estará listo para ser marcado. Desde luego hay instancias en las que el uso de la regla graduada será benéfico, pero generalmente conduce a resultados inexactos.

Ejercicios de dibujo usando compás y regla

(Los niños pueden agregar color a estos dibujos como se desee.)

1. El círculo simple (Fig. 65).
2. Un grupo de círculos concéntricos crece con intervalos iguales. Para esto, antes que nada, los mismos intervalos deberán marcarse en una línea (Fig. 66).

3. Una roseta circular (Fig. 67). Con exactitud en el dibujo, la roseta se cierra a sí misma. Una prueba seguirá en el sexto grado. Este ejercicio puede expandirse a campos de roseta. Además de esto, muchas figuras basadas en la línea recta pueden descubrirse en ella. Por ejemplo, variadas formas cuadradas y triangulares; y particularmente el hexágono regular que puede construirse en un círculo.
4. Se marcan puntos sobre una línea vertical en intervalos iguales. Se escoge un punto adecuado para el medio, y se dibujan círculos en torno a este medio, desde los demás puntos (Fig. 68).
5. Se dibujan alternadamente las hojas de la roseta circular. Se conectan los puntos y se unen en el punto central (Fig. 69)
6. Se dibuja un círculo en torno a un punto, y cuatro círculos más de la roseta, de manera que pueda trazarse un ángulo recto (Fig. 70). *Solución:* dibujar un círculo y, a este, una línea horizontal en el centro. Con ésta, se construye la perpendicular. Se dibuja, en torno al punto de intersección de la línea central y el círculo, dos círculos con el radio del primero. Se continua como puede observarse en el dibujo.
7. Empezando por el vértice, líneas iguales son marcadas repetidamente en la patas del ángulo. Los puntos se conectan como se muestra (Fig. 71).

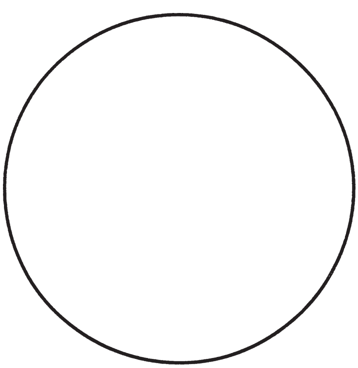


Fig. 65

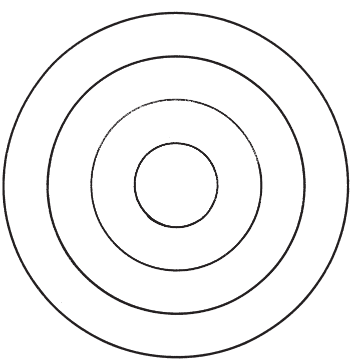


Fig. 66

Figs. 65 y 66. Ejercicios de línea recta y círculo

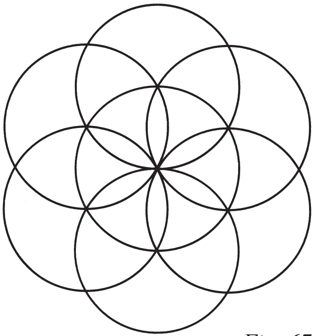


Fig. 67

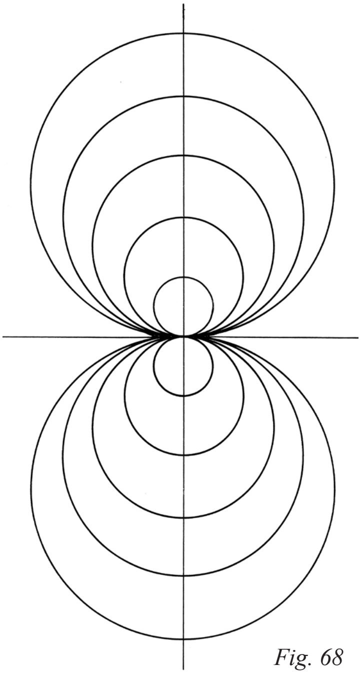


Fig. 68

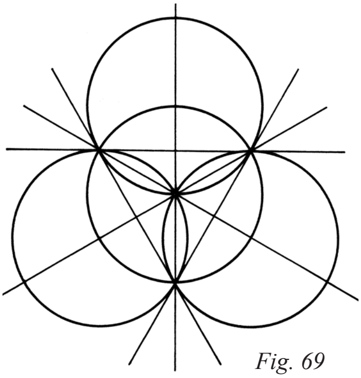


Fig. 69

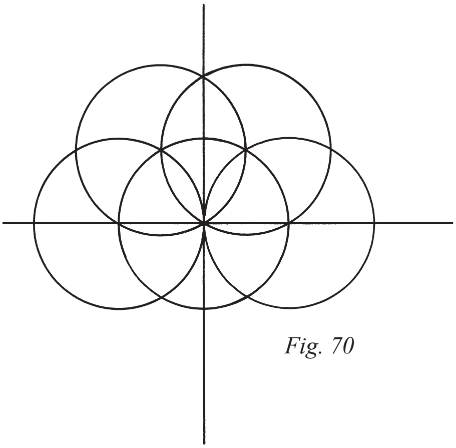


Fig. 70

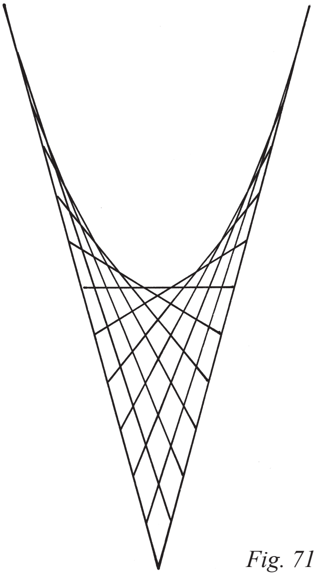


Fig. 71

Figs. 67-71. Ejercicios de línea recta y círculo

8. Un ángulo recto se construye usando la figura del ejercicio 5. También puede construirse un cuadrado a partir de ahí. En un cuadrado con lados de 3 pulgadas, se marcan puntos en intervalos de media pulgada por los lados. Un círculo con el mismo radio se dibuja en cada punto. Cuando diferentes niños eligen diferentes radios, juntos pueden crear una bella serie de metamorfosis. Desde luego, el cuadrado y los intervalos para los puntos pueden variarse al gusto. En general, es benéfico comenzar con un ángulo recto y, comenzando desde el vértice, marcar las distancias del intervalo tan frecuentemente como se desee en ambas patas del ángulo. Solo entonces se debe completar el cuadrado (Fig. 73).
9. Como en el ejercicio 8, un cuadrado se construye con lados igualmente divididos. Los puntos se conectan como se muestra (Fig. 73).

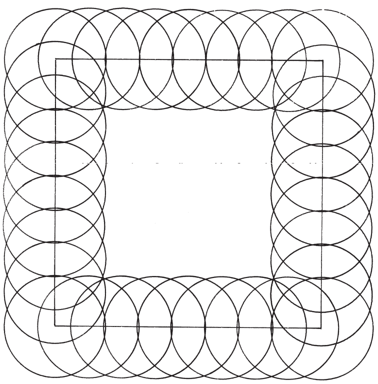


Fig. 72

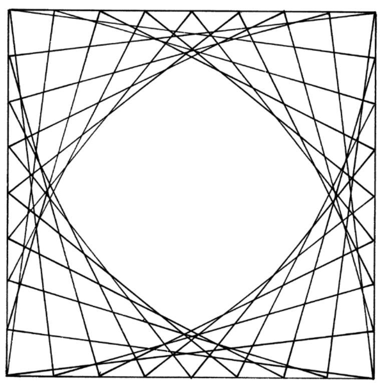


Fig. 73

Figs. 72 y 73. Ejercicios de línea recta y círculo

Construcciones de geometría básica

Métodos

Cuando el manejo de las herramientas haya sido adecuadamente practicado, entonces la construcción básica puede comenzar. Lidiar por completo con un ejercicio de construcción geométrica, incluye una serie de pasos que Louis Locher-Ernst describe de la siguiente manera:

> Aprender matemáticas implica una gran cantidad de resolución de problemas. Desafortunadamente, poco énfasis se da al hecho de que, al menos algunos problemas, sean *completamente* resueltos. Una solución realmente completa toma mucho tiempo. Los pasos tomados en resolver problemas, experimentados de esta manera, resultan inolvidables para aquellos que los tomaron. Caracterizaré brevemente el proceso de una solución así. Es acerca de cualquier problema geométrico (por ejemplo, la construcción de un cuadrado a partir de determinados datos).
>
> El problema inmediatamente contiene puntos muy *definidos* (por ejemplo, no sólo “el ángulo entre las diagonales”, sino también el tamaño deseado). Es por esto que los Griegos hablaban de *protasis*, (1) *el problema general,* y *ekthesis*, (2) *el problema definido*. En el siguiente paso, (3) la *solución (analysis)*, consiste en construir un puente entre eso que es dado con aquello que se busca. Una cierta cantidad de imaginación matemática es necesaria. Más adelante, el puente hará mucho más fácil el encontrar las verdades matemáticas más relevantes, las cuales pueden después elevarse en la conciencia. Una vez que el fundamento del puente se ha construido, entonces se procede a un cuarto paso, (4) *conducir de regreso (apogogae)*, de acuerdo al resultado del tercer paso, cuando uno toma el problema presentado hacia atrás, a través de una cadena de pasos básicos, conocidos y simples. El curso desde un problema general hacia el conducir de regreso, procede *analíticamente*. El problema general es desprendido de su contexto en el mundo real, desnudado y diseccionado. Un periodo natural de descanso ocurre.

Un punto de retorno ocurre donde los posteriores pasos cambian su dirección. El quinto paso consiste en (5) *la construcción (kataskeuae)*. De acuerdo con el conducir de regreso, cada construcción garantizada es *realmente* hecha. El siguiente paso, (6) la *prueba (apodeixis)*, debe mostrar que la construcción completada, satisface los requisitos, puesta en su lugar por el problema presentado y todos sus componentes. Esencialmente, lo que realmente ocurre es que el análisis se lleva a cabo en orden inverso.

La revisión y vista previa ocurren en el último paso, (7) el *resultado (diorismos)*. Las diferentes posibilidades del problema general, que están en parte excluidas a través de ekthesis, deben tomarse en consideración tanto como sea posible, y deben ser examinadas respecto a sus variadas consecuencias. La mayoría de las veces, nuevos problemas surgen como resultado. El ciclo se cierra de esta manera. Tomado como un todo, el curso del período de descanso antes mencionado, es sintetizar. Culmina con la integración del problema diseccionado, devuelto al contexto del mundo de las ideas[17].

Para uso pedagógico, la serie de pasos es complementada si se pone atención al correcto anclaje de un tema en el alma del niño. La cronología puede ser descrita de esta manera:

1. Camino que conduce a preguntas que plantean problemas por resolver. Esto, a menudo ocurre a través de una historia corta en la que una situación de la vida se trae a la atención de los niños.
2. La elaboración de problemas matemáticos.
3. El problema específico presentado.
4. Solución del problema.
5. Descripción de la solución.
6. ¿Por qué es correcto?
7. Construcción simplificada para el uso cotidiano y ágil.
8. Ilustración del todo asociado a través de ilustraciones hermosas.
9. Uso de la construcción con los más variados problemas.

10. Expansión del problema.
11. Planteamiento de nuevas preguntas.

En la construcción del bisector perpendicular para un segmento de línea dada, la progresión de pasos será presentada en una forma simple. Si uno sigue estos pasos con los niños, entonces puede experimentarse como un niño, primero que nada se conecta con el mundo bajo cierto aspecto. Luego los niños extraen de sí mismos lo que ya aprendieron en sus lecciones de geometría. En la solución, las fuerzas individuales del niño son llamadas. En la descripción y explicación de la construcción, el niño trae cada paso a la conciencia. En turno con este estrechamiento, una expansión gradual vuelve la vista del alma hacia conexiones más amplias y nuevas preguntas.

1. Construcción básica: el bisector perpendicular

Conduciendo al problema

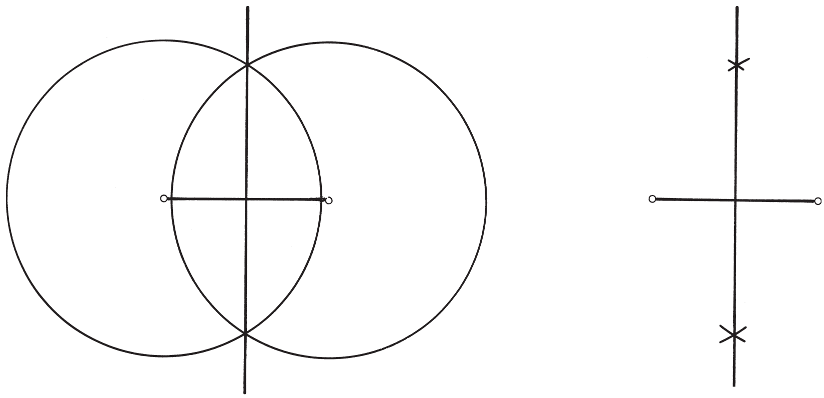
Uno puede, por ejemplo, contar a los niños a cerca de dos perros muy peligros, encadenados, A y B, cuyos sitios están marcados en el pizarrón con A y B.Un niño que está algo asustado, debe cruzar entre ellos. ¿Cómo pasará? En general, los niños propondrán el bisector perpendicular del segmento $\overline{AB}$[18]. En el camino de este bisector, el niño mantendrá siempre la misma distancia respecto a ambos perros. Este bisector perpendicular es el eje de simetría entre los puntos.

Elaboración de los problemas matemáticos

Será notado que la línea cuyos puntos son equidistantes a dos puntos de referencia externos, tienen un significado especial en la geometría o en problemas prácticos de la vida. Las expresiones *línea* y *bisector perpendicular* serán empleadas. ¿Cómo puede construirse el bisector perpendicular de una línea dada, utilizando regla y compás?

Solución del problema

La solución generalmente será encontrada por cada niño independientemente. Las diferentes soluciones serán escuchadas y discutidas. La discusión continuará hasta que se logre un entendimiento general y un acuerdo.



Figs. 74 y 75. Construcción del bisector perpendicular

Descripción de la construcción

Aquí, los niños deberían tener suficiente tiempo para dar una descripción acerca de lo que ellos *hacen* para lograr construir el bisector perpendicular de una línea. Aún no estamos interesados en lograr la formulación taquigráfica más corta. Para muchos niños, el carácter manual del trabajo de manipulación de los instrumentos sigue siendo lo más relevante. Uno puede aprender mucho de cada niño, abordando sus descripciones individuales. Por ejemplo, un niño podría escribir:

> Abro el compás hasta que cubre más de media línea. Luego acomodo la punta en el extremo A, y dibujo un círculo alrededor de ese punto. Hago lo mismo con el extremo B de la línea. Los círculos se cortan en dos puntos. Con la regla, conecto estos dos puntos para lograr el deseado bisector perpendicular de la línea $\overline{AB}$.

Si uno compara esa amplia descripción con una definición corta como: “dos arcos circulares alrededor de A y B, con el mismo radio r $> \overline{AB}/2$, se hacen intersecar en dos puntos; la línea que conecta estos puntos es el deseado bisector perpendicular de $\overline{AB}$”.

Uno puede observar que la segunda descripción además es ciertamente precisa, pero no hace el proceso realmente más visible. Para muchos niños orientados al trabajo, esto haría la geometría muy abstracta e incomprensible.

¿Por qué es correcto?

Todos los puntos de un círculo están a la misma distancia del punto central. Ya que ambos círculos en torno a A y B tienen la misma extensión de radio, los ejes de simetría de los círculos pasan por los puntos de intersección, incluidos los puntos medios, justo como ya lo hemos discutido[19].

Construcción simplificada

Para la diaria aplicación habilidosa de la construcción, es suficiente dibujar solamente segmentos del arco circular, en lugar de círculos completos, donde una medida estimada con la vista atinará a donde intersecan. Esto es sobre todo necesario, cuando la construcción juega un rol secundario y el objeto principal es el bisector perpendicular.

Se puede realizar un pequeño concurso con los niños pidiéndoles construir un bisector perpendicular, empleando los segmentos de arco circular más pequeños, sin utilizar borrador.

El todo asociado y transición a nuevas preguntas

Para demostrar una construcción que pertenece al todo en una bella ilustración, uno puede utilizar secuencias de círculos, que conducen siempre al bisector perpendicular. Un conjunto nuevo de preguntas surge si se permite que los círculos crezcan uniformemente desde ambos puntos en los extremos de la línea, y luego aparece un campo de círculos con puntos que se intersecan.

Para lograr la construcción de una manera práctica, es mejor dibujar una línea horizontal recta que se divide, por ejemplo, en segmentos de media pulgada. Marcamos los puntos extremos de estos segmentos con intervalos de cuartos de pulgada, alrededor de los cuales ahora dibujamos círculos que crecen uniformemente a izquierda y derecha. Si se colorean las áreas resultantes como un tablero de ajedrez, entonces se vuelve visible el caso especial del bisector perpendicular, dentro del grupo completo de curvas que se encuentran en el primer campo (Fig. 76). En el octavo grado, las elipses e hipérbolas contenidas dentro serán estudiadas a más detalle.

La tarea de construir el bisector perpendicular no debe terminar sin poner también la línea en diferentes posiciones. La expresión "perpendicular" naturalmente se asociará primero con la dirección de la línea vertical plomada. Sin embargo, "perpendicular a un segmento o línea recta" siempre significa que entre la línea y la perpendicular construida se forma un *ángulo recto*, el cual puede formarse también si las dos líneas están (rotadas) en diferentes posiciones. Aquí hay un avance importante que es característico de este grupo de edad: ahora comienza la posibilidad de separar formas espaciales de sus posiciones espaciales y comprender, por ejemplo, que la cualidad vertical puede ocurrir independientemente de su posición.

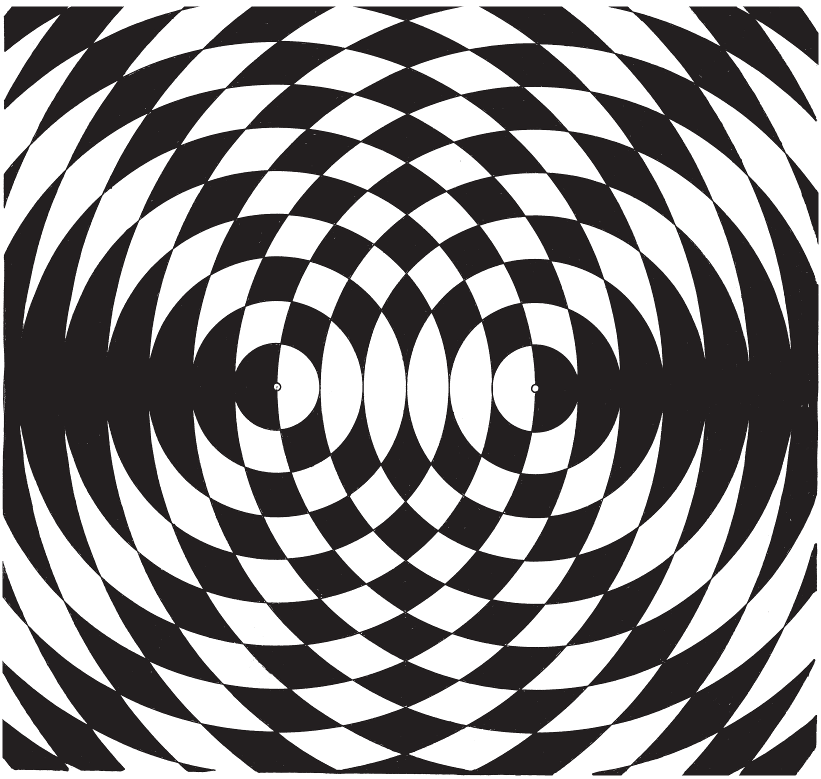


Fig. 76. Grupos de círculos que conducen al mismo bisector perpendicular

Ejercicios de bisector perpendicular

1. Dibujar el diámetro dentro de un círculo y construir un segundo diámetro, perpendicular al primero. Describir la construcción.
2. Usar el ejercicio 1 para construir un cuadrado dentro del círculo. Describir la construcción.
3. Construir un octágono dentro del círculo. Usar el segundo ejercicio para ello. Describir la construcción.
4. Construir un hexágono en el círculo, y erigir un bisector perpendicular en todos los lados del hexágono. Buscar tantas figuras geométricas interesantes como puedan encontrarse en esta figura, o que puedan ser fácilmente construidas a partir de ella (dodecágono, estrella de doce picos, estrella de seis picos, cuadrado, triángulo, etc.).
5. Construir un triángulo equilátero, con lados de dos y media pulgadas.

2. Construcción básica: bisecando una línea

De la construcción básica anterior, realizar un bisector perpendicular, surge otro problema por resolver; bisecar un segmento de línea. Para esto, sólo el punto de intersección del bisector perpendicular con la línea dada debe ser marcado.

En la aplicación práctica, se debe escoger un radio relativamente grande para los círculos empleados para la construcción del bisector perpendicular, de manera que ambos puntos de intersección estén lo suficientemente alejados como para dibujar una línea de conexión confiable. Normalmente, con la bisección de la línea, se permite que los círculos acompañantes se intersequen cerca de la línea dada, porque así se obtiene una medida de precisión adecuada.

Tip: cuando se construye en el pizarrón, el maestro debe estimar tan exactamente como le sea posible la distancia de media línea como la apertura del compás y, comenzando desde los dos puntos extremos de la línea, hacer la marca. Usualmente hay una pequeña discrepancia. El centro se marca estimando con la vista. Esto es más fácil porque así no debe usarse nuevamente la regla y, en el contexto de precisión del dibujo, esta forma es por lo menos tan buena como una construcción más larga.

Ejercicios en la bisección de una línea

1. Construir un cuadrado en un círculo. Bisecar los cuatro lados del cuadrado y conectar los puntos nuevamente formando otro cuadrado. Dibujar las diagonales de este cuadrado y armar un cuadrado dentro de otro, de manera que las esquinas de cada uno coincidan con el medio de los lados del anterior. Colorear partes de la figura para crear diseños interesantes. Un ejemplo de esto es dado en el siguiente dibujo (ver Fig. 77).
2. Construir las figuras correspondientes con hexágonos regulares[20] (ver Fig. 77 y las figuras en el CD Rom anexo).
3. Con el conocimiento ganado hasta ahora, ya es posible también construir un pentágono regular dentro de un círculo dado (Fig. 78). Para esta construcción deben llevarse a cabo los siguientes pasos:
   - Dibujar el círculo donde se creará el pentágono.
   - Dibujar una diagonal.
   - Construir una diagonal perpendicular.
   - Bisecar uno de los cuatro radios.
   - Dibujar un arco circular en torno al punto medio del radio bisecado, a través del punto final de la otra diagonal.
   - Este arco circular interseca la primera diagonal, encima de la cual el radio ha sido bisecado. Se coloca el compás en el punto de intersección, y se abre hasta el otro extremo de la diagonal.
   - Cuando se hace correctamente, la distancia a la que se ha abierto el compás puede ser marcada cinco veces sobre la cuerda del círculo. Es así como un pentágono regular se elabora en un círculo. Al mismo tiempo, permite la construcción de un decágono[21].

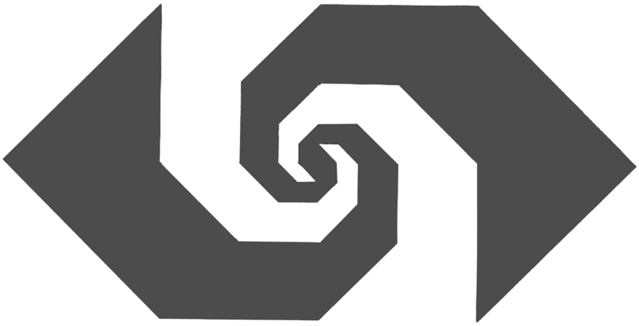


Fig. 77. Una figura espiral (espiral logarítmica)

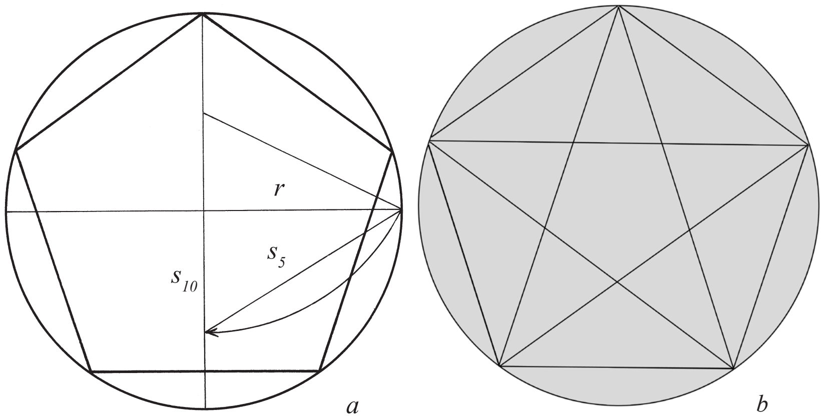


Fig. 78 a-b. La construcción del pentágono

3. Construcción básica: erigiendo una perpendicular sobre un punto de la línea recta

Cuando se erige una perpendicular sobre un punto de la línea recta, uno también debe referirse a la construcción de un bisector perpendicular. Para esto, escogemos una apertura de compás apropiada y marcamos segmentos de línea iguales a partir de un punto dado, hacia izquierda y derecha sobre la línea dada. Si construimos el bisector perpendicular para esta línea desde las referencias, entonces éste satisfará las condiciones requeridas.

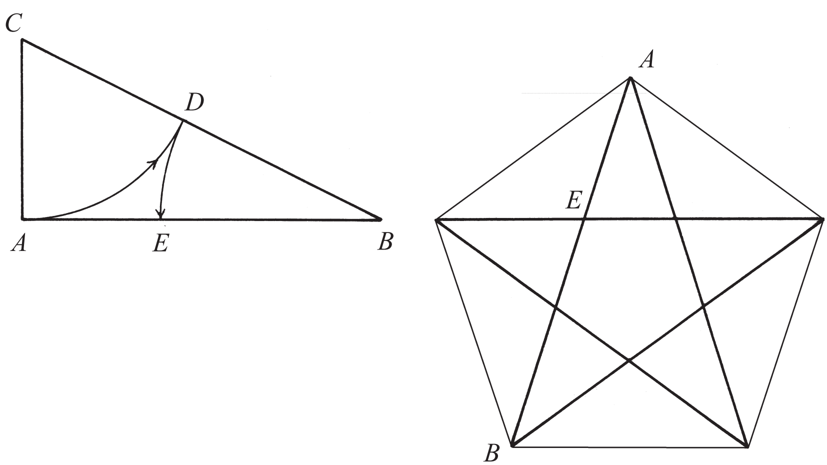
Un caso especial ocurre cuando la perpendicular debe erigirse sobre el punto extremo de una línea o segmento. Si hay suficiente espacio, la línea puede simplemente extenderse más allá del punto extremo para que la construcción pueda llevarse a cabo como antes se describió. Si no fuera este el caso, entonces hay una serie de estrategias en la construcción de perpendiculares para que esta pueda ser erigida[22].

Ejercicios sobre perpendiculares

1. Construir un cuadrado cuyos lados midan 2.5 pulgadas. Utilizar la construcción de la perpendicular.
2. Construir rectángulos con lados de 3 pulgadas y de 1 y pulgadas.

3. Con ayuda de la construcción anterior, esta construcción básica también permite la realización de un pentágono regular. Ahora, en lugar de comenzar con el círculo envolvente, empezaremos con la longitud del pentágono, esto es, el lado mismo del pentágono. Subyaciendo la construcción, tenemos que el lado del pentagrama y el pentágono guardan la proporción de la *Sección Dorada*. La división de una línea en proporción con la sección dorada es elaborada a partir de los siguientes pasos (Fig. 79).

   - Dibujar la línea $\overline{AB}$ que será dividida con la proporción de la sección dorada. Erigir una línea perpendicular sobre el punto extremo A, que tenga por lo menos la mitad de la longitud de la línea original.
   - Bisecar esta línea.
   - Transferir la línea bisecada obtenida desde el punto común, sobre la perpendicular.
   - Conectar el punto obtenido (C), con el otro punto (B) de la línea original, formando un triángulo rectángulo ABC.
   - Hacer un arco circular en torno al punto C del lado corto del triángulo a través del ápice A del ángulo recto, e intersecar éste con el lado más largo del triángulo. Se obtiene D. Ahora se hace un arco en torno a B, a través de D, hasta que interseque la línea $\overline{AB}$. Se obtiene E. Divide AB en proporción con la sección dorada.



Figs. 79 y 80. Construcción de la sección dorada y el pentágono

- De la línea original completa y la línea parcial construida, un pentágono regular puede construirse ahora[23]. Por ahora, la línea $\overline{AB}$ será puesta en la locación deseada como un lado del pentagrama. Arcos circulares, marcados con el radio $\overline{BE}$, se elaboran en torno a ambos extremos, que se intersecan mutuamente y también al lado del pentagrama. Ahora la figura puede ser terminada (Fig. 80).

Uso del juego de escuadras

El juego de escuadras que se usa actualmente combina varias funciones: es regla, triángulo isósceles, triángulo rectángulo y transportador, todo en uno. Debe dejarse al maestro decidir cuándo se introduce; sin embargo, debe introducirse de la manera correcta. Si, por ejemplo, debe dibujarse un ángulo de 30°, y es dada una punta y el vértice, entonces el punto medio del transportador debe alinearse con el vértice del ángulo, la pata dada con la marca de 30°, y entonces la segunda pata puede dibujarse inmediatamente a lo largo de la base.

La perpendicular sobre un punto de la línea también puede dibujarse fácilmente con una escuadra. Para esto, la altura (línea media) de la escuadra se coloca sobre la línea, de manera que el borde inferior se alinea con el punto dado. Desde luego se debe considerar qué tan grueso es el instrumento con el que se marca la línea. La perpendicular puede entonces dibujarse inmediatamente a lo largo de la base.

Estas astucias del dibujo pueden introducirse cuando los pasos de construcción dejan de ser lo más relevante. Esto aplica especialmente para la demostración de dibujos para los cuales se requieren muchas construcciones del mismo tipo, como por ejemplo, al crear una figura armónica completa. Estas estrategias en el dibujo también son usadas apropiadamente en la práctica, cuando se requieren líneas en ángulos rectos para el dibujo técnico. Sin embargo, si la solución de un problema de construcción es requerida, entonces esta solución debe ser realmente trabajada de manera que puedan elaborarse los pasos esenciales de construcción y reflejarse las relaciones conceptuales.

4. Construcción básica: dejando caer una plomada

Este ejercicio básico requiere que una plomada se deje caer sobre una línea, desde un punto a través del cual la línea no pasa. Los niños se han familiarizado con la plomada por su bloque de construcción en el tercer grado. Ella sirve al constructor para determinar de forma confiable la dirección vertical. En el primer paso, la línea dada también debe ser *horizontal*, de manera que la plomada corra *vertical* (Fig. 81a). Como ya se había hecho notar, los niños están en una edad en que son capaces de separar las relaciones geométricas, tales como la perpendicularidad, de las posiciones espaciales concretas. Por lo tanto, el maestro debe discutir con los niños a detalle que la plomada también puede ser empleada cuando la línea dada no es horizontal. Uno puede obtener una línea perpendicular en relación a una línea dada, a través de un punto dado (Fig. 81b).

La construcción de una perpendicular se lleva acabo con los siguientes pasos:

- Un arco circular se dibuja en torno a un punto, encontrando la línea dada en dos puntos.
- El bisector perpendicular es erigido en la línea, determinado por los puntos de intersección.

El razonamiento de la construcción es tomado de las llamadas cualidades simétricas del círculo. El bisector perpendicular en la cuerda de un círculo, pasa por el punto medio del círculo.

El punto donde la plomada encuentra la línea inicial, es llamado el punto al pie de la perpendicular. La *longitud de la plomada* es la longitud de la línea entre el punto de inicio y el punto al pie de la perpendicular. A veces, esta línea también es llamada la *perpendicular*.

Ejercicios para la perpendicular

1. Construir un cuadrado en un círculo, y producir una plomada desde el punto medio de los cuatro lados. Construir de esta manera un octágono regular.
2. Dibujar un hexágono regular dentro de un círculo, y producir una plomada desde el punto medio de los seis lados. Construir de esta manera un dodecágono regular.

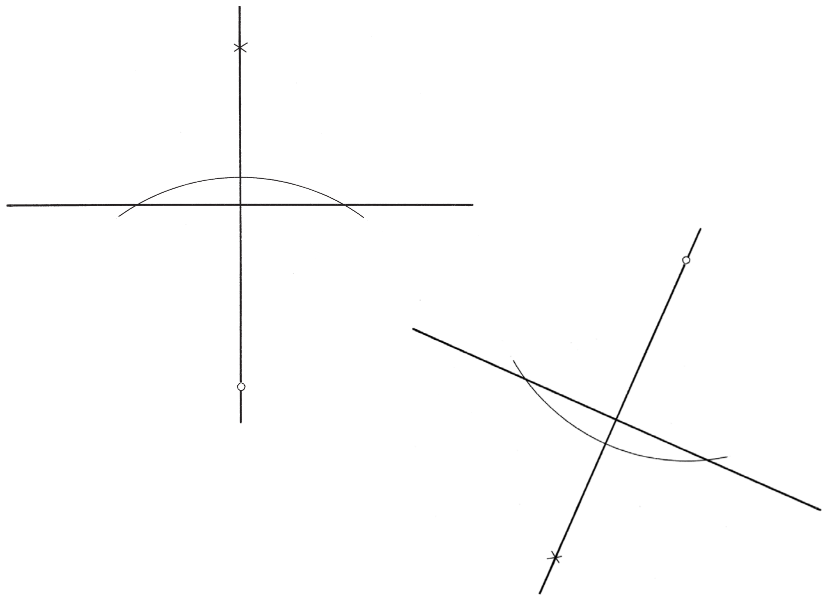


Fig. 81 a-b. Construcción de la perpendicular

3. Construir un hexágono regular dentro de un círculo. Enfatizar los tres diámetros. Producir una plomada desde el extremo del primer diámetro hacia el siguiente. Desde el pie de la perpendicular obtenida, producir una plomada hacia el siguiente diámetro, y continuar siempre en la misma dirección rotativa. Luego comenzar la construcción desde el punto extremo de alguno de los otros diámetros, y continuar hasta que la construcción se haya llevado a cabo desde todos los puntos extremos. (Si la construcción finaliza, entonces puede usarse la escuadra en la manera antes descrita, para obtener gran ventaja en posteriores dibujos; por ejemplo, dibujo geométrico en páginas del calendario.)
4. Hacer la misma construcción del número 3, pero para cuatro diámetros, encontrados en los extremos de un octágono regular.

5. Construcción básica: bisecando un ángulo

Bisecar un ángulo será tomado como la última construcción relacionada con la construcción de bisectores perpendiculares. Para esto, las cualidades simétricas del círculo y las figuras del círculo más simples, deben ser tomadas en cuenta nuevamente. Ya nos habíamos percatado de que todas las líneas medias de un círculo son ejes de simetría del círculo. Cuando dos líneas medias forman un ángulo, entonces esta figura tiene dos ejes de simetría posicionados en ángulos rectos uno respecto al otro. Son, al mismo tiempo, bisectores perpendiculares de las cuerdas en medio de los puntos del círculo de la línea media. Estas relaciones de simetría son experimentadas por los niños a un nivel básico.

Los niños pueden descubrir la construcción del bisector de un ángulo, al considerar profundamente la figura previa: empezamos con dos líneas completas, que forman dos pares con los mismos ángulos. Los pasos son: un círculo con radio de cualquier tamaño, se dibuja en torno al punto de intersección de las líneas; el vértice común de los cuatro ángulos. Con esto se logran cuatro puntos de intersección. Forman un rectángulo porque las diagonales son todas de la misma longitud, y se bisecan mutuamente[24]. Los bisectores perpendiculares de los lados del rectángulo, son los dos bisectores de los ángulos. Deben ser perpendiculares entre ellos. El ángulo complementario al de las líneas iniciales, sumado a este resulta 180°. Cada mitad es de 90° (Ver Fig. 82a).

La construcción también puede realizarse y describirse con un sólo ángulo (hecho por dos líneas medias). Esta construcción será considerada como un fragmento de la figura completa (Fig. 82b).

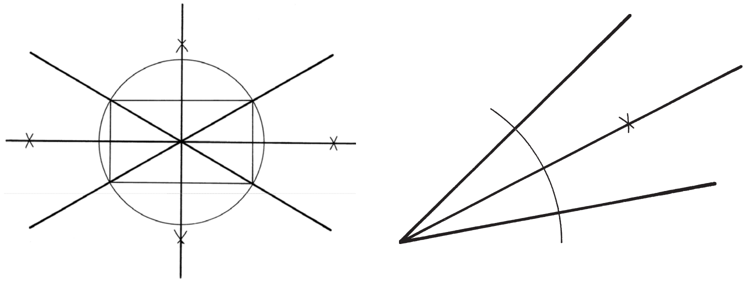


Fig. 82 a-b. Construcción del bisector de un ángulo

La siguiente figura muestra una serie de pares de líneas rectas, que comparten los mismos bisectores de ángulos.

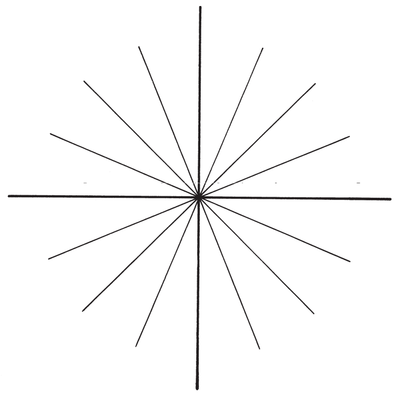


Fig. 83. Pares de líneas rectas con los mismos bisectores de ángulos

La conexión entre los bisectores angulares los bisectores perpendiculares, puede demostrarse usando un círculo: el bisector angular de dos tangentes (a través del punto medio del círculo) es el bisector perpendicular de la cuerda determinada por la secante asociada.

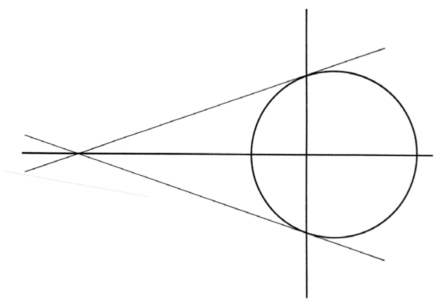


Fig. 84. La conexión entre el bisector angular y el bisector perpendicular, mostrada en un círculo

Ejercicios de bisección de un ángulo

1. Construir un cuadrado con sus diagonales dentro del círculo. En el centro del círculo, bisecar el ángulo de las dos diagonales perpendiculares, y construir un octágono regular. Construir también de esta manera otros polígonos. ¿Qué polígonos se pudieron construir ahora?
2. Construir un rectángulo con lados de 4 pulgadas y 2.5 pulgadas. Construir los bisectores angulares de los cuatro ángulos interiores. ¿Qué figura aparece en el centro?
3. Dibujar una línea horizontal y marcar dos puntos en ella, a más o menos seis pulgadas de distancia. Erigir las perpendiculares de ambos puntos. Ahora bisecar todos los ángulos rectos. Bisecar el ángulo dos o tres veces más, teniendo cuidado de que todos los ángulos sean del mismo tamaño. Observar la figura en las líneas interpenetradas, marcándolas con dos lápices. Colorear los cuadrados emergentes como un tablero de ajedrez. Mucha belleza puede descubrirse aquí.

6. Construcción básica: transfiriendo un segmento de línea

Cuando segmento de línea debe ser transferido a otro lugar, un punto de partida y una dirección sobre una línea deben ser predeterminados. Para poder realizar este ejercicio, el segmento de línea dado, es medido por un compás, y transferido a la nueva línea, desde el nuevo punto de partida, en la dirección predeterminada. Si la dirección no es predeterminada, entonces hay dos soluciones (Fig. 85).

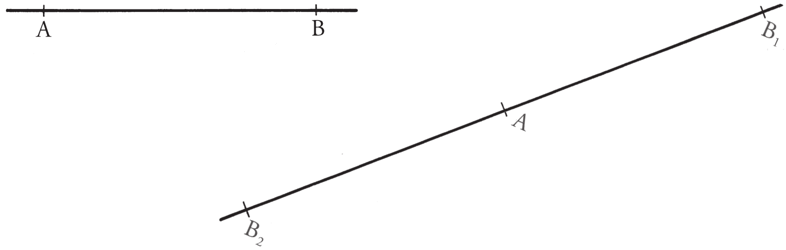


Fig. 85. Transfiriendo un segmento de línea

7. Construcción básica: transfiriendo un ángulo

Con frecuencia, un ángulo predeterminado por sus dos patas y el vértice, necesita ser transferido de manera que el vértice se ubique en un punto determinado, y una pata sobre una línea o línea media predeterminada. La transferencia se realiza con la ayuda de un compás.

- Un arco circular se dibuja al rededor del vértice del ángulo dado, que pasa por ambas patas.
- Un arco circular con el mismo radio y un tamaño adecuado es dibujado al rededor del nuevo vértice.
- Ahora la distancia entre los dos puntos de intersección en las patas es medida con el compás, y transferido al segundo dibujo, desde el punto de intersección del círculo auxiliar con la pata dada. Si la dirección ha sido predeterminada, hay una solución. En caso contrario, hay dos soluciones (ver Fig. 86).

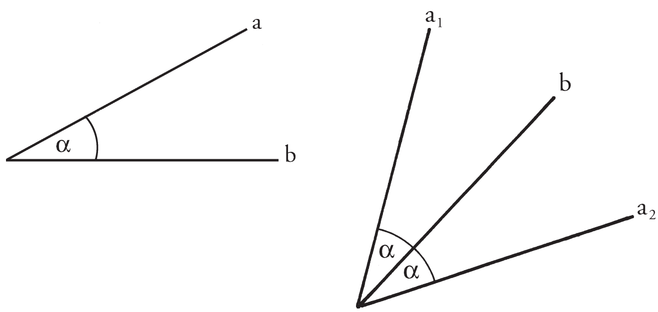


Fig. 86. Transfiriendo un ángulo

En los dos ejercicios de transferencia anteriores, la inflexibilidad de las herramientas juega un rol esencial. Si el compás cambiara, como un organismo viviente, cuando es movido, o si hiciera formas fluidas como los líquidos y gases, entonces la geometría en nuestro sentido de la palabra no sería posible. Así que la medida y, con esta, toda la geometría, depende de la cualidad de un cuerpo muerto y rígido[25].

8. Construcción básica: construcción de la paralela a una línea recta, sobre un punto

Aunque, como regla general, para la traslación de paralelas se usan las escuadras, los niños deben saber realizar la paralela de una línea sobre un punto no incluido en la misma, con compás y regla.

Para esto, cualquier línea auxiliar es dibujada sobre el punto que interseca la línea dada. A partir de la transferencia de los ángulos en el punto de intersección, correspondiente al lugar del punto predeterminado y la línea auxiliar, la deseada paralela puede emerger (Fig. 87).

Cuando esto se ha practicado, entonces puede mostrarse la traslación de la paralela con escuadras. Uno debe tener cuidado al colocar el triángulo que será movido. Si la regla no es suficientemente larga, entonces podría moverse sobre el triángulo desplazado.

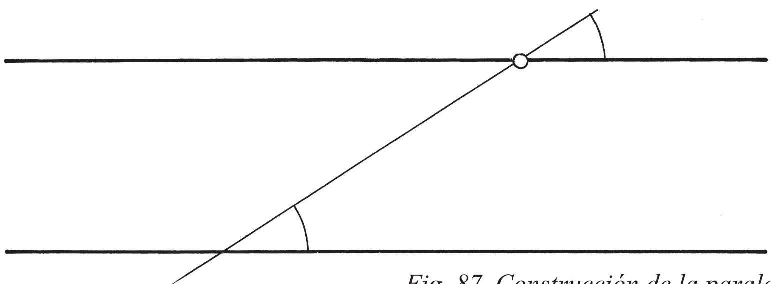


Fig. 87. Construcción de la paralela

Ejercicios para la construcción de paralelas

1. Comenzando desde un punto, dibujar dos segmentos de línea en cualquier dirección, con longitudes de 4 pulgadas y 2 pulgadas. Completar la figura con la construcción de las paralelas en un paralelogramo. *Suplemento:* construir los bisectores angulares de dos ángulos vecinos. Construir los otros dos bisectores angulares como paralelas. ¿Qué figura forman los cuatro bisectores angulares del paralelogramo? (Un rectángulo).
2. Dibujar dos líneas que intersecan. Del punto de intersección, marcar distancias iguales sobre la primera línea, y (distintas) distancias iguales sobre la segunda línea. Dibujar a partir de cada punto en una línea hacia la otra, en paralelas. ¿Puedes encontrar el otro grupo de paralelas en la figura? Dibujar varios patrones geométricos.

9. Construcción básica: construyendo la paralela media entre dos líneas paralelas

Si dos líneas paralelas son dadas, entonces la paralela media puede ser fácilmente encontrada de la siguiente manera: una línea auxiliar de tu elección es dibujada de manera que interseque ambas paralelas, el segmento entre los puntos de intersección es bisecado, y construido a través del punto medio de la paralela como se muestra (ver Fig. 88).

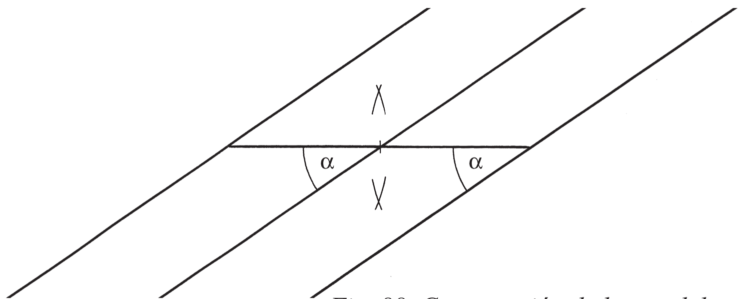


Fig. 88. Construcción de la paralela media

Ejercicios de paralela media

1. Construir un paralelogramo con lados de 3 pulgadas y 2.5 pulgadas. Construir las líneas medias.
2. Construir las líneas medias de un cuadrado, como paralelas medias de los lados.

Ángulos de paralelas

Los ángulos de paralelas deberían ser discutidos en conjunto con la construcción de paralelas. Si un grupo de líneas paralelas es cortado por una línea recta, entonces, múltiples ángulos iguales se hacen visibles, y son descritos de una manera especial (Fig. 89).

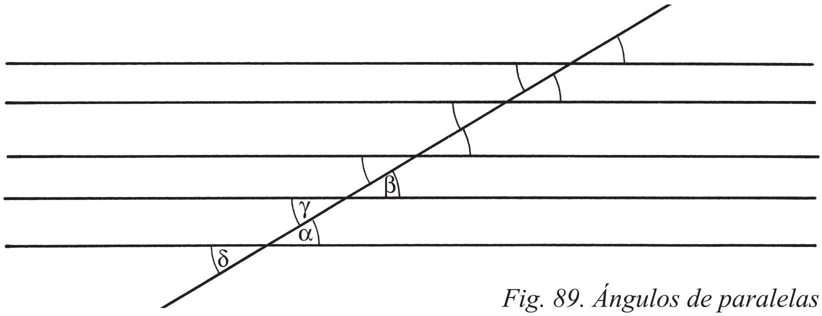


Fig. 89. Ángulos de paralelas

$\alpha = \beta = \delta$.

α y β son llamados *ángulos correspondientes*.

α y γ son *ángulos alternantes*.

α y δ son *ángulos verticales*.

Ejercicios de cierre

Para usar la construcción y, al mismo tiempo, practicar el dibujo, los niños pueden dibujar los más diversos *polígonos regulares completos* dentro de un círculo. Cada vértice de un polígono debe ser conectado a cada otro vértice. Con un número alto de vértices, múltiples líneas pasan por un punto que muestra la exactitud del trabajo.

Las construcciones básicas que se han hecho son, generalmente hablando, extraordinariamente bien recibidas por los niños. Desde esta actividad son expuestos a mucho de lo que es regulativo y organizacional. Durante los bloques de geometría, a menudo los maestros de clases complementarias me reportaban buena conducta de los niños. En la preadolescencia, son justamente estos ejercicios los que resultan de gran beneficio sobre el organismo psicológico del niño por sus efectos[26].

El primero encuentro con el Teorema de Pitágoras

Las preguntas acerca del Teorema de Pitágoras[27] pueden abordarse con algo de ejercicio, orientado a encontrar dos áreas cuadráticas iguales, dentro de un área cuadrática cuya suma sea igual al área original. Debe ser un cuadrado que se ha transformado en dos cuadrados del mismo tamaño.

Para esto, uno dibuja un cuadrado en el pizarrón y pregunta quién puede deconstruirlo de manera que, de éste, se obtengan dos cuadrados del mismo tamaño. Quizás algunos niños tengan la idea de dibujar las diagonales y luego construir los cuadros deseados a partir de los cuatro triángulos rectángulos isósceles. Para mí resulta buena idea tener la figura entera hecha en cartulina de color, disponible en dos formas: una, el cuadrado original sin cortes y, otra, la deconstrucción en partes triangulares coloreadas. Uno puede entonces separarlas y acomodarlas tantas veces como se requiera.

Ahora, con la ayuda de compás y regla, los niños pueden hacer la construcción requerida usando cartulina. Pueden cortar la figura, aprender a manejarla con habilidad y, finalmente, acomodarla en su cuaderno de geometría.

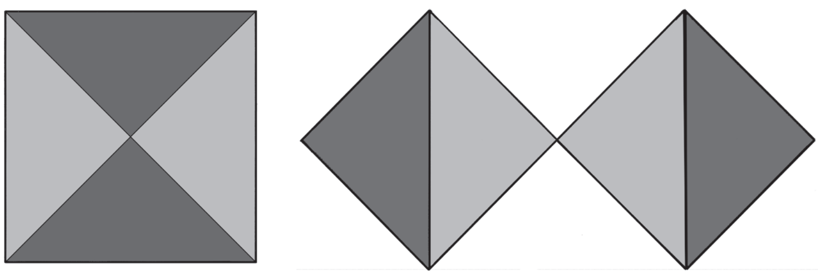


Fig. 90. El Teorema de Pitágoras de manera simplificada

El maestro puede remarcar a los niños lo significativo en la igualdad de los planos en el cuadrado original y los cuadrados más pequeños, a través de cada comparación fantasiosa que sea posible. Por ejemplo, se puede mostrar con piezas de pizza: quien quiera que se quede con la pieza grande, quedará tan lleno como quien se quede las dos piezas chicas. También se puede describir campos de patatas que deben ser plantados. Para los dos campos, la misma cantidad de papas sembradas es necesaria, y generalmente puede esperarse la misma cosecha. La sugerencia humorística de Rudolf Steiner acerca de soplar polvo sobre un campo de patatas imaginario, si uno piensa en términos de harina, mantendrá a los niños con actividad interior continua[28].

Si los niños ya se familiarizaron con la transformación del cuadrado, lo cual no requiere mucho tiempo, entonces todo el asunto toma otra dirección: en lugar de un cuadrado, uno trae el triángulo rectángulo isósceles frente al cuadrado deconstruido por las diagonales. Ahora uno señala que con el triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto, son llamados *catetos* o lados del triángulo rectángulo, y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*. Entonces uno puede decir explícitamente el Teorema de Pitágoras en esta forma especial en que los niños lo han encontrado:

En un triángulo rectángulo isósceles, la suma de los cuadrados de los dos lados iguales, resultan el cuadrado de la hipotenusa.

En conexión con este *teorema*, probablemente el mejor conocido de las matemáticas, el maestro puede hablar de Pitágoras, el hombre y sus tiempos.

El maestro no debe olvidar realizar el ejercicio de deconstrucción al revés. Para esto, uno dibuja un cuadrado no muy largo en el pizarrón y le pide a la calase que produzca un cuadrado que sea exactamente del *doble* de área. Probablemente, algunos niños quieran duplicar la longitud de los lados. Si uno demuestra esto, entonces se hará evidente el que se obtiene el cuádruple del área, no el doble. El niño que erija un cuadrado sobre las diagonales del pequeño cuadrado, habrá encontrado la respuesta correcta. Entonces uno puede formular esto en un teorema:

El área de un cuadrado se duplica cuando un cuadrado se construye a partir de una de sus diagonales.

Repaso y Vista Previa

Con el currículo de geometría propuesto para el cuarto y quinto grado, un fundamento preparatorio es dispuesto para todo lo que vendrá después. No es todavía una base lógica, más bien una activa y comparativa introducción a la geometría. Uno debe usarlo paso a paso para lograr experiencias sobre las cuales, más adelante, un sistema ordenado pueda construirse. Cuando se comienza muy pronto con presentaciones formales a una edad muy temprana, ignorando el origen de los conceptos dentro de los niños, se amenaza con provocar un bloqueo en el interés por el mundo de las formas.

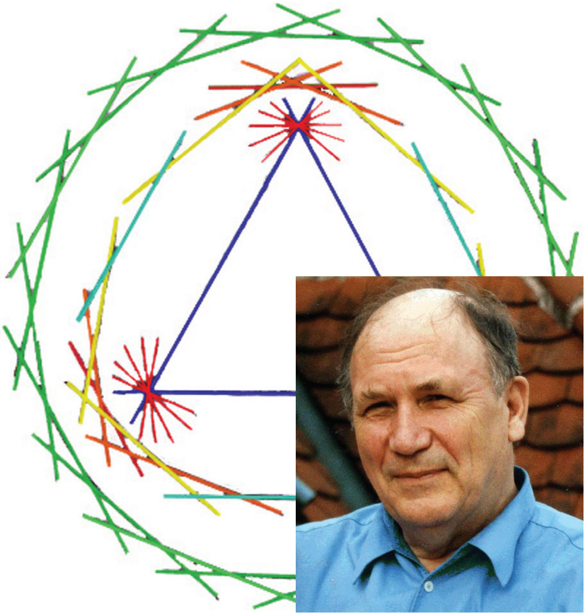
Quisiera señalar nuevamente el hecho de que las experiencias en simetría, adquiridas en los años previos de dibujo de formas, es de importancia básica para los primeros años de geometría. A través de ellos, una estructuración inicial de las formas cuadrangulares es obtenida. Son útiles en la enseñanza de los triángulos y, finalmente, juegan un papel fundamental como reflejo del desarrollo en la geometría ilustrativa. Es importante no solamente enseñar términos, leyes y construcciones, sino también usar estos objetos en la creación de figuras apropiadas. No sólo las leyes demostrables pertenecen a la geometría, sino también toda la variedad de formas dentro de las cuales estas leyes están activas.

Notas

1. E.A. Karl Stockmeyer, *Curriculo de Rudolf Steiner's para las escuelas Waldorf*.
2. Rudolf Steiner, *Metodología y didáctica*, lectura 10.
3. El verdadero nombre de esta alumna de mi clase ha sido cambiado.
4. Rudolf Steiner *zur Mathematik* (*sobre las Matemáticas* – aún no traducido), pág. 47.
5. Nuevo Testamento, libro de Mateo 27, 46; Libro de Marcos 15, 34; Libro de Lucas 23, 44.
6. 6 Ver nota #4.
7. En el sentido de la geometría proyectiva, un ángulo es determinado por dos puntos infinitamente lejanos. Cuando comenzamos en un punto finito, y pensamos en rayos que van infinitamente lejos, entonces el ángulo es formado en el punto finito.
8. Parece apropiado introducir aquí las líneas medias sin mayor discusión.
9. El diámetro como término geométrico aún no ha sido introducido. Sirve aquí sólo como referencia para el maestro.
10. Igualmente, esto tampoco ha sido introducido aún como término geométrico.
11. De Louis Locher-Ernst, *Raum und Gegenraum. Einfuehrung in die neuere Geometrie*, Dornach 1988, Capitulo 11.
12. Matemáticamente, está justificado el considerar las líneas circulares como un conjunto de elementos lineales. Un elemento lineal consiste en una línea recta y un punto dispuesto en esa línea.
13. Aquí debe ser cuidadosamente notado que una línea, no puede ser realmente definida como un conjunto de puntos, sino que es un portador de un número infinito de puntos, así como un punto es un portador de un número infinito de líneas.

14. De acuerdo al *Plan Curricular de la Escuela Waldorf*, la introducción matemáticamente exacta del infinito, ocurre en el décimo grado. Esta relación solo puede ser indicada aquí como una preparación.
15. Dentro del marco de la geometría proyectiva, el cual pensamos aquí en términos de un trasfondo general, esto ciertamente tiene un sentido definido que por el momento no debe ser discutido. Aquí estamos enfocados en la estimulación de percepciones concretas de una manera elemental.
16. Un etiquetado de líneas y ángulos parece no ser útil todavía. Puede ser reservado para los grados superiores
17. Louis Locher-Ernst, *Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis*, Dornach, 1973.
18. Aquí, la diferencia entre líneas rectas y segmentos de línea puede ser discutida en términos más exactos. Si la diferencia en la notación (línea AB, segmento $\overline{AB}$) debe introducirse en este punto o no, es decisión del maestro.
19. Yo aún no distinguiría entre "distancia del intervalo" y "distancia de", en este nivel, porque la diferencia no es aún parte del lenguaje común usado, y no es requerido todavía para fines de la materia.
20. Los primeros dos ejercicios contienen, de manera elemental, leyes superiores que serán revisadas en grados más altos, como las espirales logarítmicas. Uno puede señalar también que estas formas ocurren en la naturaleza en numerosas maneras, por ejemplo, los dientes de león o las conchas de caracol.
21. En mi opinión, uno debería familiarizar a los niños con dichas construcciones, antes de que puedan ser probadas. Uno puede plantar semillas futuras, trayendo la atención al hecho de que serán trabajadas (probadas) más adelante.
22. Tales construcciones pueden ser dadas como problemas en una oportunidad posterior.
23. Aquí uno también debe indicar que la prueba vendrá más adelante.
24. Consultar la Casa de los Cuadrángulos.

25. Esto es enfatizado porque, en la geometría superior (como ya se vio con la construcción perspectiva), la medida no se mantiene fija, en el sentido normal de la palabra. Además de eso, surge la pregunta interesante: ¿qué geometría aplicaría a los líquidos y gases?
26. Tales dibujos geométricos, dibujados bajo la supervisión de un profesional, pueden incluso ser terapéuticos, por ejemplo, en los casos de histeria.
27. Consultar *El arte de Educar*, por Rudolf Steiner, Décima conferencia.
28. Rudolf Steiner, *El Estudio del Hombre*, Decimocuarta conferencia.



Born in 1939 in Danzig (now part of Poland), Ernst Schuberth attended the Waldorf schools in Hanover and Wuppertal. He studied mathematics, physics, philosophy, and educational science at the University of Bonn in Germany.

From 1964 until 1966 he worked with Georg Unger in his institute for mathematics and physics and received his Waldorf teacher training at the Goetheanum in Dornach, Switzerland. He was a class teacher and high school teacher at the Rudolf Steiner school in Munich, Germany. In 1970 he received his PhD at the University of Tübingen, and in 1974 he became a professor of mathematics at the University of Bielefeld.

In 1978 he founded a private college for Waldorf teacher training in Mannheim, Germany, where he is still teaching. In 1990 he was invited by the Romanian government to start a Waldorf teacher training in Bucharest, Romania. He has also taught at Herzen University in St. Petersburg, Russia, and at Rudolf Steiner College in Sacramento, California.

Ernst is married and has five children together with his wife Erika, who is also a Waldorf class teacher. His wish is that his books may stimulate teachers to find their own ways, make their own experiences, and teach their students with love and mathematical imagination.

Waldorf PUBLICATIONS

351 Fairview Avenue
Suite 625
Hudson, NY 12534

ISBN 978-1-888365-52-8

9 781888 365528